Quadriche

Quadrica = luogo di punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ che sono isotropi (= annullano) per una forma quadratica $q(x)$

$$q : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$n=3$ Quadrica → superficie algebrica reale del II ordine.

→ punti di $\overline{A_3(\mathbb{R})} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ le cui coordinate sono classi di soluzioni di una equazione omogenea di II grado

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

- I teorema dell'ordine ($n=3$):

  Sia $V = V(F)$ una superficie algebrica di ordine k in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$

  Allora ogni retta di $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ che non è inclusa in V interseca V in esattamente k punti.

Dim Identica al teorema dell'ordine nel piano.

- II teorema dell'ordine ($n=3$).

  Sia $V = V(F)$ una sup algebrica di ordine k in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$

  Allora ogni piano di $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ che non è componente di V interseca V in una curva di ordine k.

Dim: Si procede scrivendo il piano in forma parametrica

$$\begin{cases} X_1 = \alpha X_1' + \beta X_1'' + \gamma X_1''' \\ X_2 = \alpha X_2' + \beta X_2'' + \gamma X_2''' \\ X_3 = \alpha X_3' + \beta X_3'' + \gamma X_3''' \\ X_4 = \alpha X_4' + \beta X_4'' + \gamma X_4''' \end{cases} \longrightarrow F(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) = 0$$

$\downarrow$

$0 = 0 \rightarrow$ un'

eq. omogenea di grado k

in 3 parm.

□

Def: Si dice punto t-uplo di una varietà $V(F)$ un punto $P \in V(F)$ tale che ogni retta per P incontra $V(F)$ in P t-volte ed esistono rette che incontrano $V(F)$ in P esattamente t-volte.

[equivalente alla def. data per le curve].

Oss: Una varietà di ordine k non può avere punti $(k+1)$-upli (altrimenti avremmo una stella di rette per quel punto $\forall$).

Data una quadrica $Q \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$, è possibile associare a Q una matrice reale e simmetrica A (a meno che i punti di Q siano tutti e soli quelli le cui coordinate $X = {}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ sono classi di autosoluzioni di ${}^tXAX = 0$

e in particolare $\exists$ una forma bilineare simmetrica (o prod scalare) associata ad A

$$\boxed{b_A(X,Y) = {}^tXAY}$$

e una relazione di "ortogonalità" (detta polarità) indotta da Q "$\perp_Q$" ove $X \perp_Q Y \iff b_A(X,Y) = 0$

N.B: A è definita a meno di un coeff. di prop. non nullo.

e la forma b_A dipende da A non direttamente da Q.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline & 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

↑ ↑

in due casi forme bilineari differenti ma sono associate alla stessa quadrica!

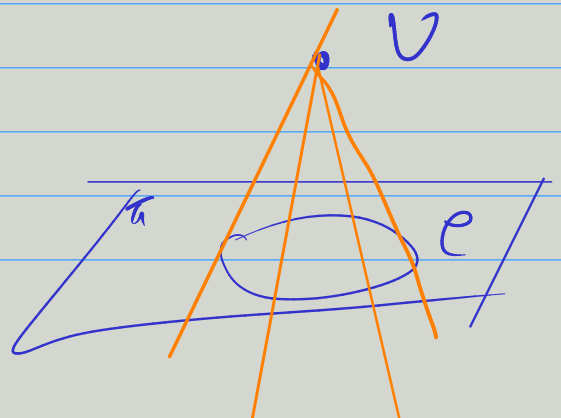
D'altro canto la relazione "$\perp_A$" e "$\perp_{A'}$" sui punti di $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ è la stessa e quindi la polarità dipende solo da Q.

$\forall \lambda \neq 0$: $X \perp_A Y \Leftrightarrow b_A(X,Y) = 0 \Leftrightarrow {}^tXAY = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\, {}^tXAY = 0$ con $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow b_{\lambda A}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X \perp_{\lambda A} Y$

Oss: Un punto $P \in Q \iff P \perp_Q P \iff P \in P^{\perp_Q}$.

Def: In $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ si dice cono o cilindro (quadratico) luogo dei punti che proiettano da un punto V fissato una conica C che si trova in un piano che non contiene V. Il punto V è detto vertice e la superficie così ottenuta è detta cono se V è proprio e cilindro se V è improprio.



→ Un cono/cilindro è l'unione di tutti i punti che si trovano sulle rette che congiungono il vertice dello stesso con una conica qualsiasi che è contenuta in un piano che non passa per V.
Tale rette sono dette <u>rette generatrici</u> del cono/cilindro e la conica sarà detta <u>base</u> del cono/cilindro.

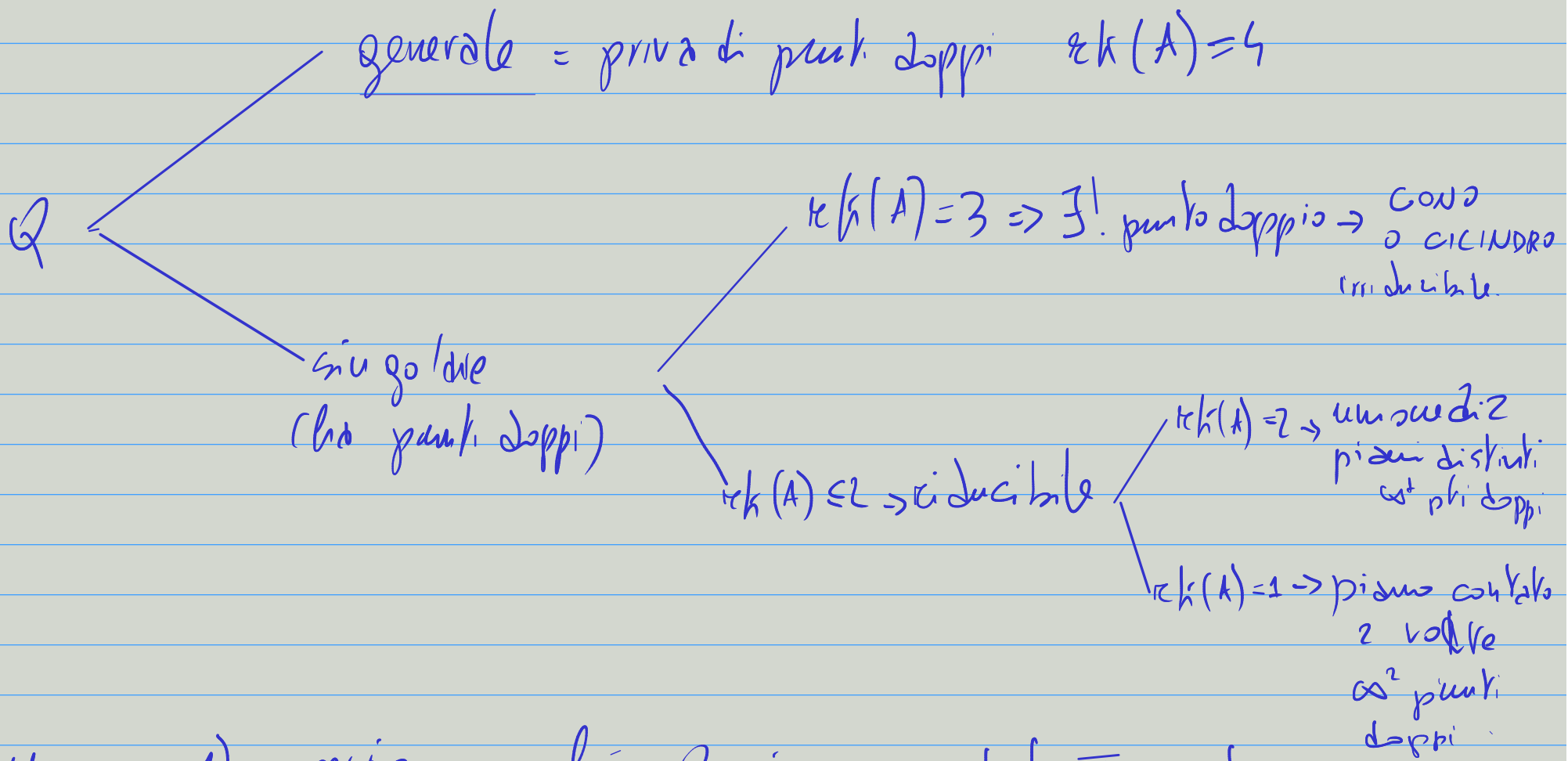
<u>OSS</u>: Le generatrici di un cilindro sono tutte parallele. perché passano tutte per il vertice che è un punto improprio.

Teorema: Sia Q una quadrica di matrice A
Allora P è un punto doppio per Q
$\Leftrightarrow$ chiamate $X = {}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ le
coord. di P $\quad AX = \underline{0}$

Dim. come per le coniche

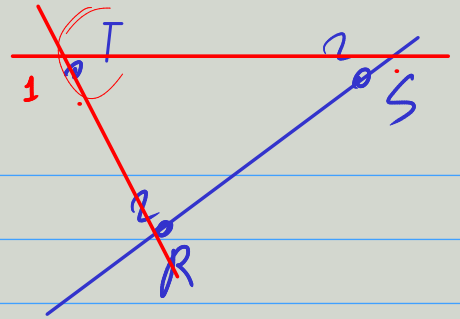
Teorema: Sia Q una quadrica. Allora
1) Q non ha punti tripli
2) Q è riducibile (nell'unione di 2 piani
che possono essere reali e coincidenti, reali
e distinti o immaginari e coniugati)
$\Leftrightarrow$ Q ha almeno 2 punti doppi.

3) Q ha esattamente 1 punto doppio $\Leftrightarrow$ Q è un cono o un cilindro.



DIM 1) ovvio perché Q è sup. del II ordine

2) Q ha ≥ 2 punti doppi. Siano R, S due punti doppi per Q.



La retta RS interseca Q almeno 4 volte $\Rightarrow$ è contenuta in Q. Sia $T \in Q \setminus RS$ questo punto esiste sicuramente in $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ anche se non è detto che sia reale.

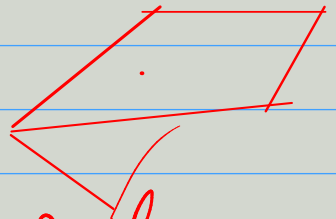
Consideriamo il piano $\langle R, S, T \rangle = \pi$

Questo interseca Q almeno nelle 3 rette RS, ST e RT in quanto RT e ST hanno almeno 3 intersezioni con Q. $\Rightarrow$ la curva intersezione $\pi \cap Q$ dovrebbe avere grado ≥ 3 (non può essere una conica) $\Rightarrow$

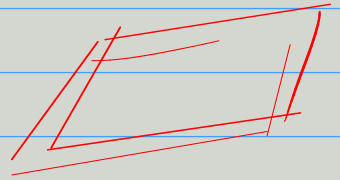
dal II Teorema dell'ordine segue $\pi \subseteq Q$

$\Rightarrow$ l'eq. di π divide l'eq. di Q e l'eq. di Q si fattorizza nel prodotto di 2 eq. di primo grado. $\rightarrow$ Q è riducibile

cv 2 piani



Reali e distinti



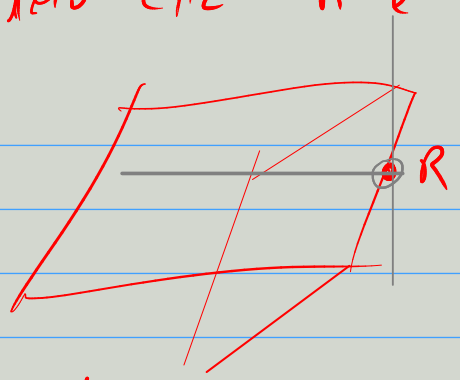
Reali e coincidenti

∞^1 pl. doppi

Imm. coniugati

Viceversa. Sia $Q = \pi \cup \sigma$ con π, σ due piani e sia $R \in \pi \cap \sigma$ (N.B. $\pi \cap \sigma$ è sempre un piano reale se $\pi = \sigma$ oppure una retta reale se $\pi \neq \sigma$).

Dimostriamo che R è doppio.



Sia infatti r una generica retta per R.

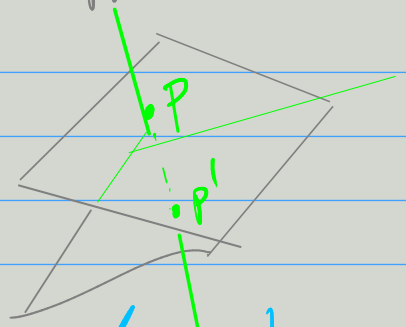
Se $\exists\ T \in r \cap Q$ con $T \neq R \Rightarrow$

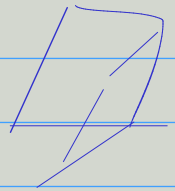
$\Rightarrow T \in \pi$ oppure $T \in \sigma$ in quanto

$Q = \pi \cup \sigma \Rightarrow RT \subseteq \pi$ oppure $RT \subseteq \sigma$

Quindi la generica retta che passa per R deve avere le 2 intersezioni con Q in R (una retta per R che non è contenuta in Q interseca Q solamente in R) $\Rightarrow$ R punto doppio. In particolare $\pi \cap \sigma$ è un luogo di

punti doppi $\Rightarrow$ ce ne sono almeno 2





OSS 1 I punti doppi di una quadrica riducibile $Q = \pi \cup \sigma$ sono tutti e soli i punti di $\pi \cap \sigma$

OSS 2 $rk(A) = 2$ ci sono ∞^1 punti doppi e $Q = \pi \cup \sigma$ con $\pi \neq \sigma$

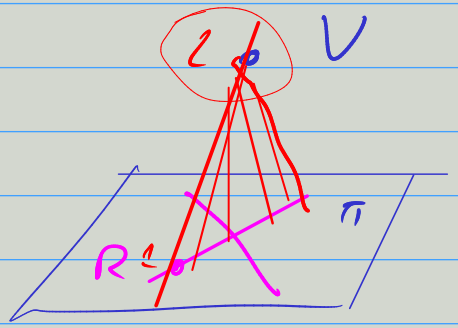
$rk(A) = 1$ ci sono ∞^2 punti doppi e $Q = \pi \cup \pi$

3) Se Q ha esattamente un punto doppio $\Rightarrow$ Q è un cono o un cilindro.

Sia Q quadrica e V il suo unico punto doppio. In particolare Q è irriducibile. Q non contiene piani

Sia π un piano che non passa per V

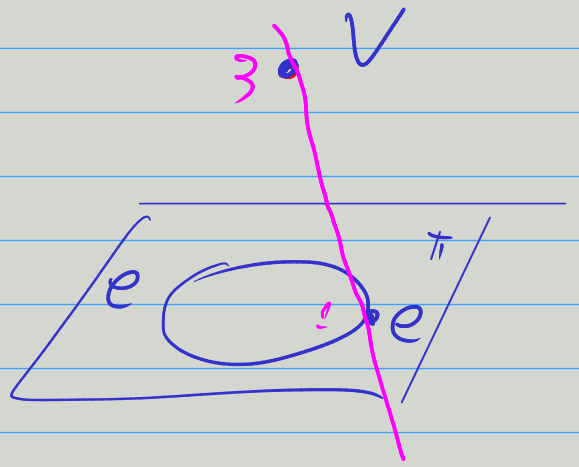
Allora π interseca V in una conica irriducibile e dunque generale. Supponiamo per assurdo che $\pi \cap Q$ sia riducibile e dunque contenga una retta $r \Rightarrow \forall R \in r$



la retta VR sarebbe contenuta in Q perché ha ≥ 3 intersezioni con $Q \Rightarrow$ ogni retta per V ed un punto di r è contenuta in $Q \Rightarrow$ tutti i punti sul fascio di centro V e contenuto nel piano $\langle V, r \rangle$ sarebbero in $Q \Rightarrow$

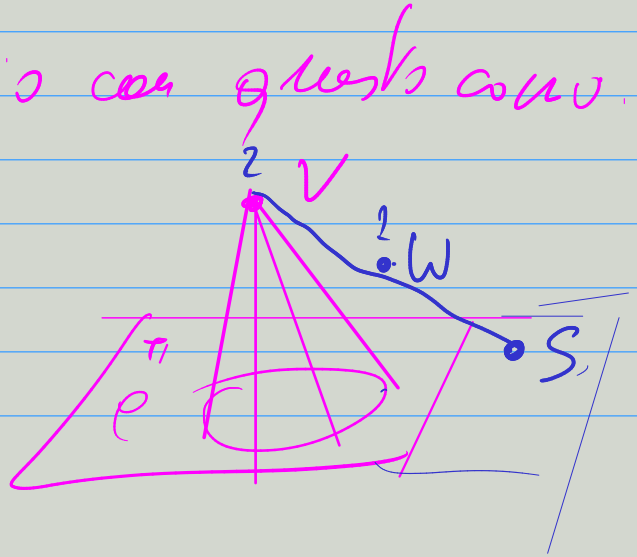
$\Rightarrow$ il piano $\langle V, \pi \rangle$ sarebbe contenuto in Q $\Rightarrow$ $\lightning$ ASSURDO.

Sia V vertice; π un piano con $V \notin \pi$.
e sia $C = \pi \cap Q$ una conica generale. Osserviamo che $\forall$ $C \in C$ la retta VC interseca Q almeno 3 volte (2 in V ed 1 in C) $\Rightarrow$ è contenuta in Q.



$\Rightarrow$ in particolare il cono di vertice V e base C è contenuto in Q.

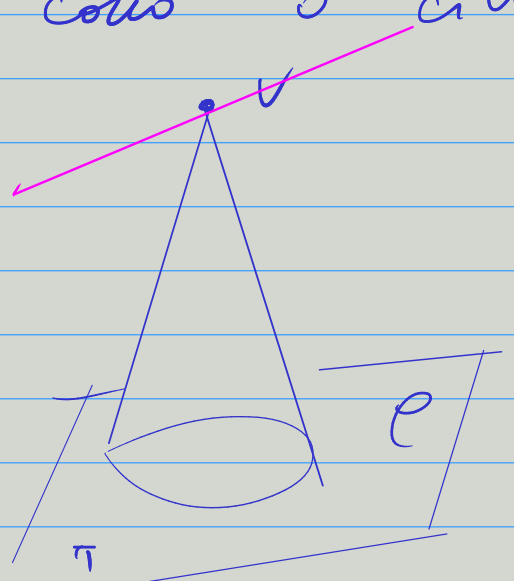
Mostriamo ora che Q coincide proprio con questo cono.
Supponiamo $\exists W \in Q$ ma non del cono considerato $\Rightarrow$ VW come retta è contenuta in Q perché la interseca almeno 3 volte



ma allora il punto $VW \cap \pi$ è un punto S di Q diverso da V (perché $V \notin \pi$) ma $VW \cap \pi \subseteq Q \cap \pi = C \Rightarrow S \in C$ e dunque $VW = VS$ è una retta del cono e $W \in$ al cono $\lightning$ ASSURDO $\square$

Quindi Q è un cono o un cilindro #

Viceversa supponiamo Q cono o cilindro di vertice V e base $C \subseteq \pi$.



A) V è un punto doppio, infatti ogni retta per V ed un altro punto di Q è contenuta in Q. Quindi la retta "generica" per V interseca Q solo in V $\Rightarrow V$ è un punto multiplo.

B) Se Q è una varietà algebrica, c'è almeno una sez. piana che ci riveli Q in una conica ($Q \cap \pi = C$) $\Rightarrow$ Q deve avere ordine 2.

C) Verifichiamo che effettivamente il luogo geom. considerato ammette una eq. di $\underline{II}$ grado
(Si tratta di un insieme algebrico). □

Ciu cidentalmente: ne aveva una quadrica di eq

$$x_1 x_2 + x_3^2 = 0$$

$rk(A) = 3$
punto doppio
$V = [(0\,0\,0\,\underline{1})]$

ammette anche eq. $(x_1 x_2 + x_3^2)^2 = 0$]

Come studiare le quadriche?

Studiamo le sezioni piane.

A) Sia Q una quadrica riducibile $\Rightarrow Q = \pi \cup \sigma$

e sia ϑ un piano con $\vartheta \nsubseteq Q \Rightarrow$

$\Rightarrow \vartheta \cap Q = \vartheta \cap (\pi \cup \sigma) = (\vartheta \cap \pi) \cup (\vartheta \cap \sigma)$.

cioè ϑ interseca Q nell'unione di 2 rette

- reali e distinte
- reali e coincidenti
- imm. e coniugate

→ OGNI SEZIONE DI UNA QUADRICA RIDUCIBILE È UNA CONICA RIDUCIBILE

B) Sia Q un cono o un cilindro di vertice V.

Sia π un piano. $\Rightarrow$ Se $V \notin \pi \Rightarrow \pi \cap Q$ è una conica generale ($\Rightarrow$ irriducibile).

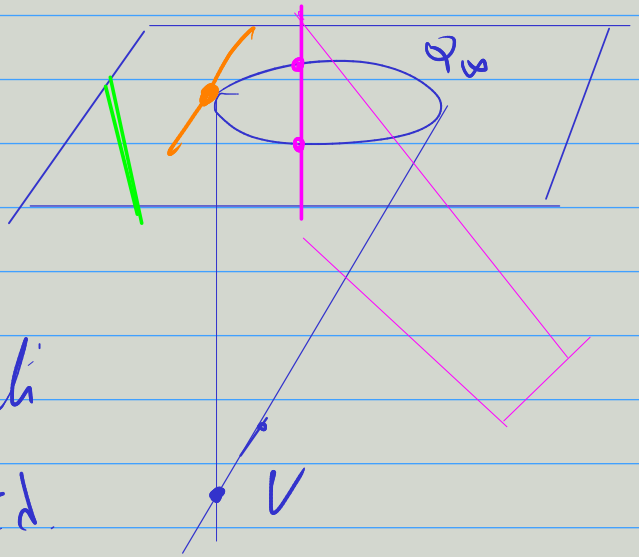
Se $V \in \pi \Rightarrow V$ è punto doppio per $\pi \cap Q \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è una conica riducibile.

Vediamo che coniche possono ottenersi.
Dobbiamo studiare i loro punti impropri.

Q quadrica. $Q_\infty = Q \cap A_\infty$ ← piano improprio

π piano $\Rightarrow$ i punti impropri di $\pi \cap Q$ saranno
proprio i punti di $\pi \cap Q \cap A_\infty = \pi \cap Q_\infty$
↑ conica impropria

Q cono $\Rightarrow$ $V \notin A_\infty \Rightarrow Q_\infty = Q \cap A_\infty$ è una conica generale



Sia π un piano generico.

$\Rightarrow$ π può intersecare Q_∞ come
- 2 punti reali e distinti
- 2 punti reali e coincidenti
- 2 punti immaginari coniugati

Se $\pi \not\ni V$ e interseca Q_∞ in 2 punti reali e distinti $\Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è conica gen. con 2 punti impropri distinti
$\Rightarrow$ IPERBOLE

Se $\pi \supset V$ e interseca Q_∞ in 2 punti reali e distinti $\Rightarrow$
$\pi \cap Q$ conica riducibile per V
con 2 rette reali e distinte.

Se $\pi \not\supset V$ e interseca Q_∞ in 1 punto reale contato 2 volte
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è PARABOLA.

Se $\pi \supset V$ e interseca Q_∞ in 1 punto reale contato 2 volte
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è una retta contata 2 volte.

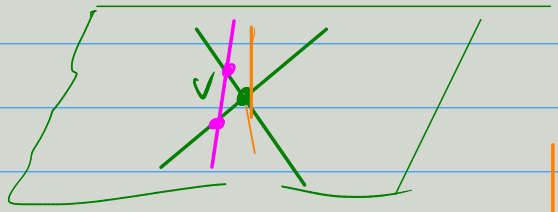
Se $\pi \not\supset V$ e interseca Q_∞ in 2 punti imm. e coniugati $\Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è una ELLISSE

Se $\pi \supset V$ e interseca Q_∞ in 2 punti imm. e coniugati $\Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cap Q$ è unione di 2 rette imm. e coniugate.

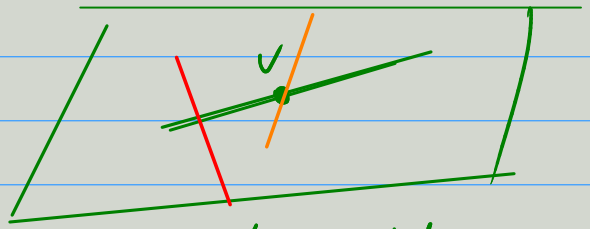
LE CONICHE SI CHIAMANO CONICHE PERCHÉ POSSONO NASCERE COME INTERSEZIONE DI UN CONO CON UN PIANO

Cosa succede se Q è un cilindro

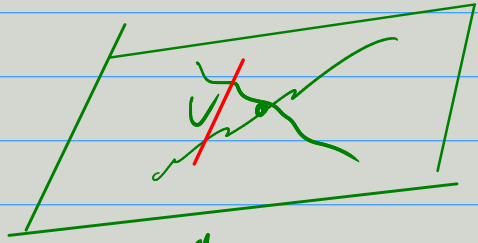
Ve $Q_\infty \Rightarrow Q_\infty$ è riducibile



2 rette reali e distinte



1 retta contata 2 volte



2 rette immaginarie e coniugate

- Ti intersecca Q_∞ in 2 punti distinti e non passa

- Ti intersecca Q_∞ in 1 punto contato 2 volte $\neq V \Rightarrow$ PARABOLE

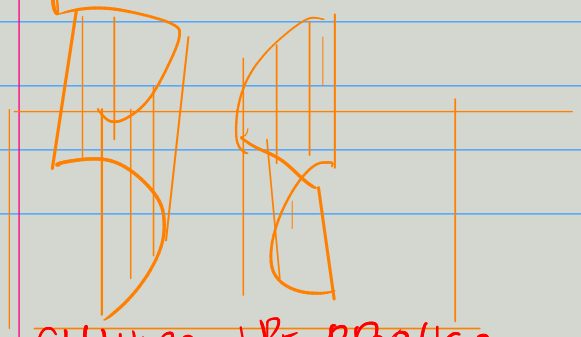
- Ti intersecca Q_∞ in 2 punti $\neq V$ immaginari coniugati $\Rightarrow$ ELLISSI

per V_∞ $\Rightarrow$ iperboli

- π passa per V e interseca solo in V $\Rightarrow$ 2 rette reali e coincidenti.
- π passa per una delle 2 rette in cui si spezza Q_∞ $\Rightarrow \pi \cap Q$ sono 2 rette di cui una propria e l'altra impropria.

$\downarrow$

le sezioni irriducibili di Q sono tutte iperboli

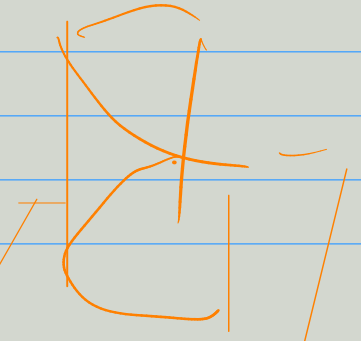


CILINDRO IPERBOLICO

- π passa per V e interseca Q_∞ solo in V $\Rightarrow$ 2 rette parallele.
- π passa per V e interseca Q_∞ nella retta $\Rightarrow$ 2 rette di cui una impropria

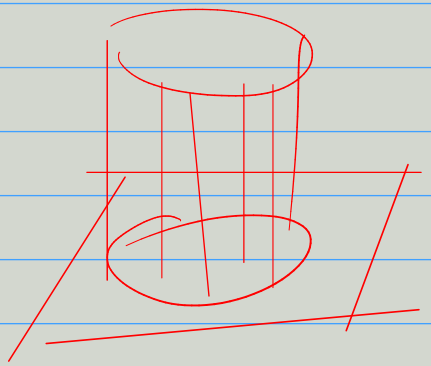
$\downarrow$

le sezioni irriducibili sono tutte parabole



CILINDRO PARABOLICO

π passa per $V \Rightarrow$ interseca il cilindro in 2 rette parallele



CILINDRO ELLITTICO