

Complessificazione $\rightarrow$ Studiare $\widetilde{E_n(\mathbb{R})}$ immerso in $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$

$$W \leq \mathbb{R}^n \longmapsto \langle W \rangle_{\mathbb{C}^n} \leq \mathbb{C}^n$$

$\left. \begin{array}{l} \text{punti} \\ \text{rette} \\ \text{piani} \\ \text{ecc.} \end{array} \right\} \text{reali} \xrightarrow{\Theta} \text{immersi in uno spazio complesso}$

Chiusura le immagini di sottospazi di $\widetilde{E_n(\mathbb{R})}$ in $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$ sottospazi reali.

oss 1) Un sottospazio è reale $\Leftrightarrow$ esso ammette una base formata da vettori di $\mathbb{R}^n$

1) Un sottospazio W è reale $\Leftrightarrow W = \overline{W}$
ove $\overline{W} = \{ \bar{w} \in \mathbb{C}^n \mid w \in W \}$.

In particolare una retta è reale $\Leftrightarrow \kappa = \bar{\kappa}$

un punto in $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ è reale $\Leftrightarrow \pi = \bar{\pi}$

Un punto/retta/punto non reale è detto non aggiunto

$n=2$

Ogni retta possiede almeno un punto reale.

$\kappa \cap \bar{\kappa} \neq \emptyset$ e se $\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow \kappa$ è reale.

se $\kappa \neq \bar{\kappa} \Rightarrow \{P\} = \kappa \cap \bar{\kappa} = \overline{\kappa \cap \bar{\kappa}} = \bar{\kappa} \cap \kappa = \{P\}$

è reale.

$E_n(\mathbb{R})$

prod. scal. del positivo

$\longrightarrow \widetilde{A}_n(\mathbb{C})$

A hand-drawn diagram on lined paper showing a 3D coordinate system. The axes are labeled x , y , and z . A curved line is drawn in the upper part of the diagram, and a wavy line is drawn in the lower part.

Se $\pi \nmid \bar{\pi} \Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \emptyset$ con π e $\bar{\pi}$

quindi Γ è una retta reale.

1) $\overline{F_0} = z \Rightarrow z$ é real.

3) τ e $\overline{\tau}$ sono coniugati $\Rightarrow \tau$ è detto inv.
di Π specie.

$$z \begin{cases} x + iy = 0 \\ z = i \end{cases}$$

$$\mathbb{R} \begin{cases} x - iy = 0 \\ z = -i \end{cases}$$

$$\mathbb{R}k \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \mathbb{R}k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \mathbb{C}$$

Teorema: Data una retta $\mathbb{r}$ immaginaria di I specie
 $\exists!$ piano reale π che contiene $\mathbb{r}$.

Data una retta $\mathbb{r}$ immaginaria di II specie
 non $\exists$ un piano reale che contenga.

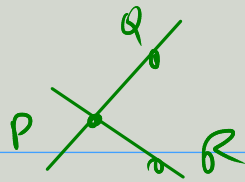
Dim

Se $\mathbb{r} \subseteq \pi$ e $\pi = \bar{\pi}$ è reale $\Rightarrow$

$$\bar{\mathbb{r}} \subseteq \pi$$

Ma se $\mathbb{r}$ e $\bar{\mathbb{r}}$ sono sghembe $\Rightarrow$ non $\exists$ π siffatto.

Se $\pi \cap \bar{\pi} = \{P\} \Rightarrow \pi$ è proprio il piano generato
 da P , un punto $Q \in \mathbb{r}$ e un punto $R \in \bar{\mathbb{r}}$.



□

Def. Una varietà algebrica Σ (curva/superficie)
in $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ è detta reale se $\Sigma = \bar{\Sigma}$ ove
 $\bar{\Sigma} = \{ \bar{P} \mid P \in \Sigma \}$.

I punti reali di Σ corrispondono a $P \in \Sigma$ tali
che $\bar{P} = P$.

Teorema

Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione di
una curva algebrica C in $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ con
 $F(x_1, x_2, x_3)$ polinomio a coeff. reali
 $\Rightarrow C = \bar{C}$ cioè C è una curva algebrica reale.

DM. Mostriamo che $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \bar{P} \in \mathcal{C}$ e quindi $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}$.

Supponiamo $P = [(x'_1 \ x'_2 \ x'_3)] \in \mathcal{C}$.

$$\Rightarrow F(x'_1 \ x'_2 \ x'_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{F(x'_1 \ x'_2 \ x'_3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{F}(\bar{x}'_1 \ \bar{x}'_2 \ \bar{x}'_3) = 0 \Leftrightarrow \text{wd } F = \bar{F}$$

$$F(\bar{x}'_1 \ \bar{x}'_2 \ \bar{x}'_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$\bar{P} \in \mathcal{C}$ ovvero coniugando tutto

$$P \in \bar{\mathcal{C}}$$

La cosa vale anche per le superfici in $\widetilde{A_3(\mathbb{C})}$ oppure per i sistemi di eq. in $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$. $\square$

(se una varietà è descritta da un sistema di equazioni
a coeff. reali $\Rightarrow$ essa è reale).

Teorema (che non dimostro) $\rightarrow$ vale anche il viceversa.

Ovvero ogni varietà reale ($\Sigma = \bar{\Sigma}$) può descriversi
mediante un sistema di eq. a coeff. in $\mathbb{R}$.

$$\Sigma \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ F_K(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\Sigma} \quad \begin{cases} \bar{F}_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ \bar{F}_K(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma = \bar{\Sigma} \quad \text{per ipotesi} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma = \Sigma \cap \bar{\Sigma} \Rightarrow \text{mettete insieme tutte le} \\ \text{eq. e poi isolate} \\ \text{parte reale / parte imm.}$$

Ha sendo dato ad esempio un piano π in $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ con $\pi \neq \bar{\pi}$ chiedere una equazione reale della retta reale contenuta in π .

Es. $\pi: 2x + 3iy + 5 = 0$

$\bar{\pi}: 2x - 3iy + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3iy + 5 = 0 \\ 2x - 3iy + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 10 = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Studio DELLE CONICHE

$n=2$ in $\mathbb{A}^1$

curve algebriche del I ordine $\rightarrow$ rette

curve algebriche del II ordine $\rightarrow$ coniche

Def: Si dice conica una curva algebrica reale
piana del (II) ordine.

$\downarrow$
corrisponde in $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$

$\downarrow$ polinomio di
grado 2

$\nearrow$ descritto da
un polinomio
 $\downarrow$
polinomio
a coeff in $\mathbb{R}$

Come sono fatte le coniche?

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Ci sono ∞^6 possibili equazioni $\rightarrow \infty^5$ coniche.

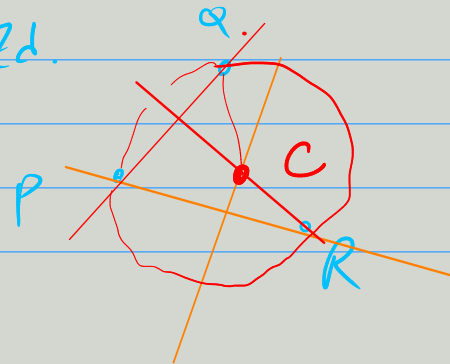
In generale dati 5 punti distinti

"in posizione generale" esiste una e una sola conica che passa per essi.

5 punti tali che le 610 coord. determinino un sistema lin. di rango 5 nelle incognite

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{32})$$

Abbiamo già visto che per 3 punti propri ^{non allineati} passa una ed una sola circonferenza.



Una circonferenza è una conica $\rightarrow$ in particolare
è una conica per $P, Q, R, J_0, \bar{J}_0$

Def: Si dice circonferenza (generalizzata) una conica che passi
per J_0 e $\bar{J}_0$.

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + \underline{2a_{12}x_1x_2} + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Ad ogni conica C è associata una matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice A mi induce perché definisce una forma bilineare simmetrica $b(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

e una forma quadratica $q(\bar{x}) = b(\bar{x}, \bar{x})$.

Quali sono i punti isotropi per $q(\bar{x})$ ovvero gli $\bar{x}$ tali che $q(\bar{x}) = 0$?

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

questa eq. è equivalente a

$$F(x_1 \ x_2 \ x_3) = 0$$

Teorema: Sia C una conica con matrice associata A .

$\Rightarrow$ 1) C non ha punti doppi ed è riducibile

$\Leftrightarrow C$ ha almeno un punto doppio

2) Se C ha esattamente un punto doppio $\Rightarrow$

C è unione di 2 rette reali e distinte
o immaginarie coniugate che si intersecano
esattamente in quel punto.

Se C ha almeno 2 punti doppi $\Rightarrow C$ è una
retta contata 2 volte.

3) I punti doppi di C corrispondono
esattamente alle classi di soluzioni di

$$AX = \underline{0}$$

In particolare se $\text{rk}(A)=3 \Rightarrow C$ non ha punti doppi ed è detta generale.

se $\text{rk}(A)=2 \Rightarrow C$ ha esattamente un punto doppio ed è detta degenere.

se $\text{rk}(A)=1 \Rightarrow C$ ha ∞^2 punti doppi ed è detta doppiamente degenere.

DIM i) Segue dal teorema dell'ordine.

Se $\exists P$ triplo $\Rightarrow$ ogni retta per P è contenuta in $C \Rightarrow$ quindi non ci sono punti tripli

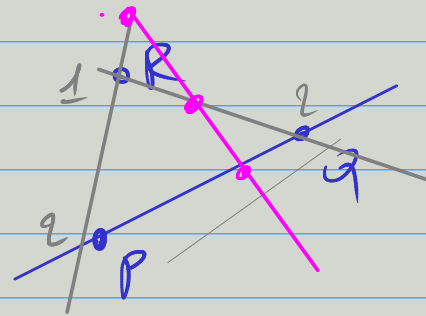
Se P doppio e $Q \in C$, $Q \neq P$ la retta PQ deve essere contenuta in $C \Rightarrow C$ si spezza

nell'unione di 2 rette che possono
essere reali e distinte / reali e coincidenti /
immaginarie e coniugate.

2) Supponiamo che C contenga 2 punti doppi
 P e Q .

$\Rightarrow$ Se $C = (\overline{PQ})^2$ la retta PQ conta 2
volte $\Rightarrow OK$

Se per assurdo $\exists R \in C \setminus (\overline{PQ}) \Rightarrow$ le rette



RP e RQ
avrebbero
contatto in C

$\Rightarrow C$ conterebbe almeno 3 rette ∇ perché
 C dovrebbe essere di ordine ≥ 3 ma ha

ordine 2.

3) Noi sappiamo che i punti doppi di C soddisfanno le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C X A X = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{22}x_2 + 2a_{12}x_1 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{33}x_3 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 = 0 \end{array} \right. \quad P \in C \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} {}^C X A X = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{22}x_2 + 2a_{12}x_1 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{33}x_3 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 = 0 \end{array}} \right\} \text{pts doppio}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C X A X = \underline{0} \\ \underline{A X = 0} \end{array} \right. \quad \text{in particolare le II eq.} \\ \text{implica la prima}$$

quindi i punti doppi di C corrispondono a tutte e sole le classi di soluzioni di $A X = \underline{0}$ $\square$

Visto che associata alla matrice A c'è un prodotto scalare (che non è definito positivo in generale) ha senso chiedersi cosa sia l'ortogonale di un punto rispetto ad esso.

Def: Sia C una conica di matrice A e sia $\perp_A$ la relazione di ortogonalità rispetto al prod. scalare indotto da A .

Per ogni punto $P = [(x, x_1, x_2)]_r$ dice
pol/dre di P il luogo $P^{\perp_A} := \{[(y, y_1, y_2)]\}$

$$\begin{aligned}
 & \left. (y_1 \ y_2 \ y_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
 & = \left\{ [(y_1 \ y_2 \ y_3)] \mid b_A((y_1 \ y_2 \ y_3), (x_1 \ x_2 \ x_3)) = 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Teorema Se P non è un punto doppio di $C \Rightarrow$
 la polare di P è una retta τ_P e si
 dice che P è il polo di τ_P .

DIM: P non punto doppio di $C \Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow (y_1 \ y_2 \ y_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ è l'eq. di una
 retta.

□