Teorema dell'ordine

Il numero di intersezioni di una curva algebrica di ordine n in $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ con una retta è n a patto che la retta non sia una componente ed il campo sia alg. chiuso.

DIM

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ y=ax+b \end{cases} \rightarrow f(x, ax+b)=0 \text{ eq di grado } n$$

??

coord affini

cosa succede alle rette verticali? $x=a$

$\Rightarrow$ n soluzioni perché $\mathbb{K}$ alg. chiuso.

DIM (corretta).

Sia $F(x_1\, x_2\, x_3)=0$ l'equazione omogenea della curva $\mathcal{C}$.

siano $X' = [(x_1' \; x_2' \; x_3')]$ $X'' = [(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')]$ due punti

di $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ distinti ed

$$r_0 : \begin{cases} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'' \\ x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'' \\ x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'' \end{cases}$$

le eq. parametriche della retta per X' e X''

$(\lambda, \mu) \neq (0 \; 0)$

Adesso mettiamo tutto a sistema e scriviamo

$$g(\lambda, \mu) = F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'')$$

1) Se $g(\lambda, \mu) \equiv 0 \quad \forall \lambda, \mu \Rightarrow$ la retta r è inclusa in $\mathcal{C}$.

$r \subseteq \mathcal{C}$.

2) Se $g(\lambda, \mu)$ non è identicamente nullo $\Rightarrow g(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo di grado n

in λ e μ.

$$g(\lambda,\mu) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}\mu + \text{——} + a_n\mu^n$$

per $(a_0 \text{——} a_n) \neq (0 \text{——} 0)$.

DISTINGUIAMO 2 casi

A) $a_0 \neq 0 \Rightarrow$ in particolare ogni autosoluzione (λ,μ) di $g(\lambda,\mu)=0$ avrà $\mu \neq 0$ perché altrimenti $a_0\lambda^n = 0$ con $a_0 \neq 0$ $\lambda \neq 0$ ↯

quindi possiamo dividere per μ^n

e posto $t = \frac{\lambda}{\mu}$

abbiamo che le ~~auto~~ sol. di $g(\lambda,\mu)=0$
classi di

corrispondono alle sol. di

$$g(t,1) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \_\_\_\_ + a_n$$

con $t = \frac{\lambda}{\mu}$

ma queste sono esattamente n perché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow$ FINE.

B) $a_0 = a_1 = \_\_\_\_ = a_{k-1} = 0$; $a_k \neq 0$.

$$g(\lambda,\mu) = a_k \lambda^{n-k} \mu^k + a_{k+1} \lambda^{n-k-1} \mu^{k+1} + \_\_\_\_ + a_n \mu^n =$$

$$= \mu^k \left(a_k \lambda^{n-k} + a_{k+1} \lambda^{n-k-1} \mu + \_\_\_\_ + a_n \mu^{n-k} \right).$$

la classe $[(\lambda,\mu)] = [(1,0)]$ è soluzione di

$g(\lambda,\mu)=0$ k volte.

il polinomio $a_k\lambda^{n-k} + \_\_\_\_\_\_ + a_n\mu^{n-k}$ è un polinomio omogeneo di grado $n-k$ in (λ,μ) e il coeff. del mo termine di grado max in λ, cioè a_k è diverso da $0 \Rightarrow$ per il discorso di prima ci sono $n-k$ classi di autosoluzioni del tipo $[(t,1)]$

RISULTATO FINALE k. volte $[(1,0)]$

$n-k$ sol. del tipo $[(t,1)]$

$n-k+k=n$ soluzioni

(contate con la debita molteplicità). $\square$

OSS: In generale se $\mathcal{C}$ curva algebrica di ordine n, r retta in $A_2(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$ o $r \subseteq \mathcal{C}$

oppure $|r \cap \mathcal{C}| \leq n$

Esercizio. Si descrivano le coniche che passano per i punti

$$\boxed{[(0\ 0\ 1)] \quad [(0\ 1\ 1)] \quad [(0\ 1\ 0)]} \quad [(1\ 0\ 0)]$$

improprio

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

OSSERVIAMO CHE LA CONICA CONTIENE 3 PUNTI ALLINEATI $\Rightarrow$ per il teorema dell'ordine deve contenere la retta per questi 3 punti

$\boxed{x_1 = 0}$ quindi x_1 divide l'eq. della conica

In particolare, poiché la conica ha ordine 2 la sua eq. dovrà essere il prodotto di 2 eq. di primo grado $\Rightarrow$ la conica è unione di 2 rette.

1) $x_1 = 0$

2) retta per $[(1\ 0\ 0)]$

$\Downarrow$

retta del tipo $\alpha x_2 + \beta x_3 = 0$

EQ DELLE CONICHE $x_1(\alpha x_2 + \beta x_3) = 0$

$x(y + c) = 0$ oppure

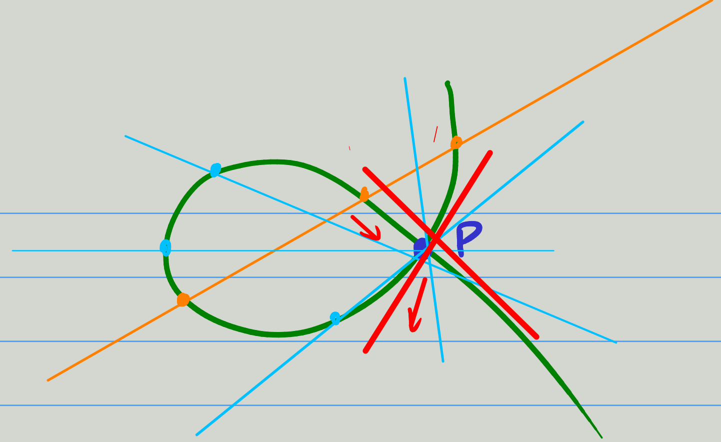
$\boxed{[X=0] \cup \underline{A_\infty}}$

retta impropria

$x_1 x_3 = 0$

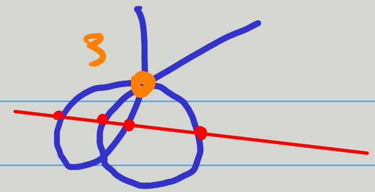
<u>Def</u> Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\overline{A_2(\mathbb{K})}$ e con $\mathbb{K}$ algeb. chiuso. Un punto $P \in \mathcal{C}$ è detto r-uplo se ogni retta r per P interseca $\mathcal{C}$ in P r volte ed esistono esatt. r rette per P che intersecano $\mathcal{C}$ in P $r+1$ volte (contate con la debita molteplicità)

$r=2 \Rightarrow P$ è un punto doppio.



curva di ordine 3

il punto P deve essere contato 2 volte come intersezione con una retta che passa per esso.



curva di ordine almeno 4

Def: Una curva algebrica di eq.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

è detta riducibile $\Leftrightarrow \exists\, G(x_1, x_2, x_3)$

$H(x_1, x_2, x_3)$

tali che $F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) \cdot H(x_1, x_2, x_3)$

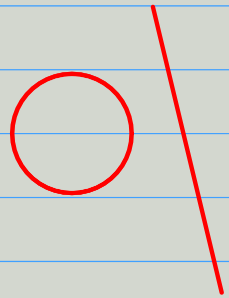
$\deg G, H \geq 1$

In questo caso $V(F) = V(G) \cup V(H)$

insieme dei punti di $F(x_1, x_2, x_3) = 0$

DOMANDA: Una curva algebrica riducibile è unione di 2 curve algebriche.

Se una curva algebrica è unione di 2 altre curve algebriche è riducibile?



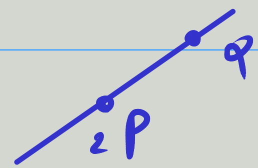
$(x^2+y^2-1)(x+3y+5)=0$

É vero se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso.

Teorema. Una conica è riducibile $\iff$ essa ha almeno un punto doppio.
In tale caso si riduce nell'unione di 2 rette

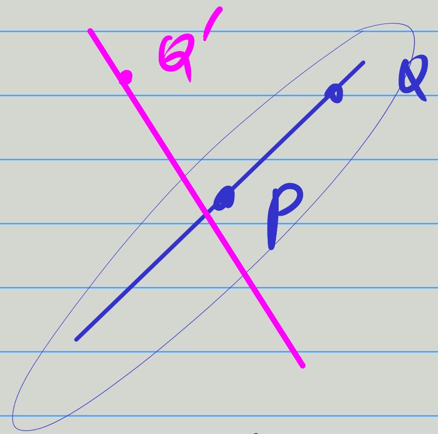
DIM: Conica = curva algebrica del II ordine.

1) Sia $P \in \mathcal{C}$ doppio e sia $Q \in \mathcal{C}$ con $Q \neq P$. $\Rightarrow$ la retta per P e Q interseca la conica in almeno 3 punti (P 2 volte + Q) $\Rightarrow$ è contenuta



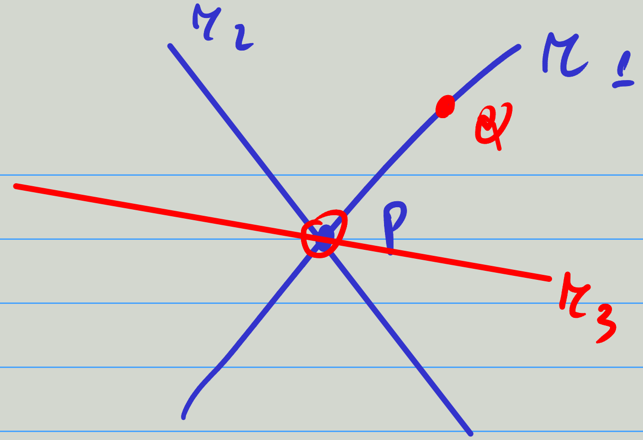
$\Rightarrow$ l'eq. della retta divide l'equazione di $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ la conica $\mathcal{C}$ "si spezza" nell'unione di 2 rette (non necessariamente distinte).



Viceversa una conica riducibile è unione di 2 rette. $\mathcal{C} = r_1 \cup r_2$

siamo in ambito ampliato $\Rightarrow r_1 \cap r_2 \supseteq \{P\}$



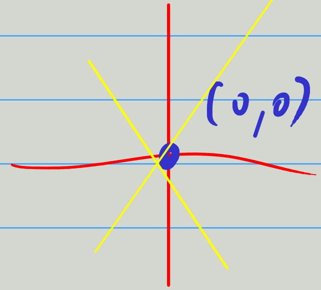
DIMOSTRIAMO CHE P è doppio.

Sia r_3 una generica retta per P.
Se r_3 intersecasse la conica in un punto $Q \neq P \Rightarrow Q \in r_1 \Rightarrow \overline{PQ}$ è uguale a r_1
oppure $Q \in r_1 \Rightarrow \overline{PQ}$ è uguale a r_2
$\Rightarrow$ in particolare se $r_3 \neq r_1, r_2$ non ci possono essere punti di r_3 in comune con $\mathcal{C}$ diversi da P $\Rightarrow$ i 2 punti di intersezione di r_3 con $\mathcal{C}$ devono coincidere ed essere P
$\Rightarrow$ P doppio $\square$

N.B prendiamo la conica di eq.

$$\mathcal{C}: (x^2+y^2)=0 \quad \text{in} \quad A_2(\mathbb{R})$$

conica reale



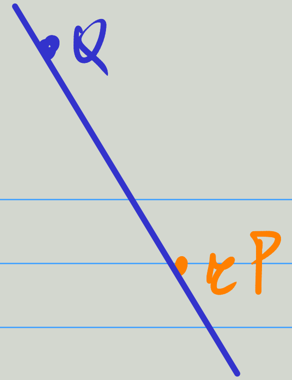
$\widetilde{A_2(\mathbb{R})}$

$[(0\ 0\ 1)]$

$(0,0)$ é punto doppio per $\mathcal{C}$

$$(x+iy)(x-iy)=0 \longrightarrow \text{rette immaginarie}$$

Teorema: Una curva di ordine n con un punto n-uplo P si spezza nell'unione di n rette per P.



L'ambiente giusto in cui studiare curve algebriche è in $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso.

COMPLESSIFICAZIONE.

$$\boxed{A_n(\mathbb{R})} \hookrightarrow \widetilde{A_n(\mathbb{R})} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow \widetilde{A_n(\mathbb{C})}$$

geometria affine/euclidea reale — ampliamento proiettivo — complessificazione

Vogliamo riconoscere gli elementi "reali" in $\widetilde{A_2(\mathbb{C})}$

Def: Una curva algebrica in $\widetilde{A_2(\mathbb{C})}$ è detta reale se ammette almeno una equazione a coeff. reali

→ Una retta è detta reale se ammette una eq. a coeff. reali

In coord. affini

$y = 3x + 5$ retta reale.

$y = 3i + x$ retta immaginaria.

$iy = 3ix + 2i$ reale o immaginaria?

↓

$y = 3x + 2$ reale!

Un punto è detto reale se ammette coordinate a coeff. in $\mathbb{R}$.

$[(1,2,0)]$ reale.

$[(i,5,1)]$ immaginario

$[(i,2i,3i)] =$

$= [(1\ 2\ 3)] \longrightarrow$ reale

Def: Sia $P \in \widetilde{A_n(\mathbb{C})}$. Si dice punto (complesso) coniugato di P il punto

$\overline{P} = [(\overline{p}_1 \text{———} \overline{p}_{n+1})]$ ove $P = [(p_1 \text{———} p_{n+1})]$

Teorema $P = \overline{P} \iff P$ è un punto reale.

DIM. Se P reale $\Rightarrow$ $P = [(p_1 \text{———} p_n)]$ con

$$p_1 \cdots p_n \in \mathbb{R} \Rightarrow P \equiv \{\alpha(p_1 \cdots p_n) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{\underline{0}\} =$$

$$= \{\alpha(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} =$$

$$= \{\bar{\alpha}(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n) \mid \bar{\alpha} \in \mathbb{C}\} =$$

$$[(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n)] = \bar{P}$$

Se $P = \bar{P} \Rightarrow$ in particolare

$$[(\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_{n+1})] = [(p_1 \cdots p_{n+1})]$$

$$\Rightarrow (\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_{n+1}) \in [(p_1 \cdots p_{n+1})]$$

$$\Rightarrow (\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_{n+1}) = \alpha(p_1 \cdots p_{n+1})$$

per $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$

in particolare se $\alpha = 1 \Rightarrow$

$$p_1 = \overline{p_1} \;\text{———}\; p_{n+1} = \overline{p_{n+1}}$$

$\Rightarrow$ P è reale.

se $\alpha = -1 \Rightarrow \overline{p_1} = -p_1 \quad \overline{p_2} = -p_2 \;\text{———}$

in particolare

$$(p_1, p_2 \;\text{———}\; p_{n+1}) =$$

$$= i\,(p_1' \; p_2' \;\text{———}\; p_{n+1}')$$

con $p_1' \;\text{———}\; p_{n+1}' \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow P = [\,i\,(p_1 \;\text{———}\; p_{n+1})\,] =$$

$$[-(p_1' \;\text{———}\; p_{n+1}')]$$ è

una rapp. reale di P.

Se $\alpha \neq -1, 1$

$$(\alpha+1)(p_1 \ \text{———} \ p_{n+1}) =$$

$$= (p_1+\bar{p}_1 \ \text{——} \ p_{n+1}+\bar{p}_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad P = [(p_1 \ \text{———} \ p_{n+1})] =$$

$$= [(\alpha+1)(p_1 \ \text{———} \ p_{n+1})]$$

ammette rapp reale. $\square$

Esempio.

$P = [(1, 2i, 0)]$ è reale?

$P = \overline{P}$?

$$\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 1 & -2i & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & -2i \end{pmatrix} = -4i \neq 0$$

P non è reale.

$Q = [(2i, 3i, i)]$

$Q = \overline{Q}$?

$$\text{rk}\begin{pmatrix} 2i & 3i & i \\ -2i & -3i & -i \end{pmatrix} = 1$$

Q è reale.

OSS: Sia $F(x_1, x_2, x_3)=0$ l'equazione di una curva algebrica reale.

$$\Rightarrow \quad P \in V(F) \iff \overline{P} \in V(F)$$

DIM. Sia $P=[(x_1' \; x_2' \; x_3')]$

$$\Rightarrow F(x_1' \; x_2' \; x_3') = 0$$

$$\iff \overline{F(x_1' x_2' x_3')} = \overline{0} = 0$$

$$\iff F(\overline{x_1'}, \overline{x_2'}, \overline{x_3'}) = 0$$

$$\iff \overline{P} \in V(F)$$

$\square$

Teorema: Una curva algebrica é reale $\iff$

$$\overline{V(F)} = \{ \overline{P} \mid P \in V(F) \} = V(F)$$

Teorema: 1) Una retta per 2 punti reali é reale.

2) per ogni punto immaginario di $A_2(\mathbb{C})$ passa esattamente una retta reale.

3) Ogni retta immaginaria (= non reale) di $\widetilde{A_2(\mathbb{C})}$ ha esattamente un punto reale.

<u>DIM</u>: 1) IMMEDIATO: calcoliamo l'eq. in $\widetilde{A_2(\mathbb{R})}$ e questa ha coeff. in $\mathbb{R}$.

2) Sia P un punto immaginario $\Rightarrow$ una retta reale per P deve contenere anche $\overline{P} \neq P$

$\Rightarrow$ una retta reale per P deve essere la retta $r(P, \bar{P})$

ORA LA RETTA coniugata di r_0 è la retta $\bar{r}_0 = r(\bar{P}\, P)$

$\Rightarrow r_0 = \bar{r}_0$ e quindi r_0 è reale.

ALTERNATIVAM $P \equiv [(x_1 \; x_2 \; x_3)]$

$\bar{P} = [(\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \; \bar{x}_3)]$

$r_0 = \mathcal{L}((x_1 \; x_2 \, x_3), (\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \, \bar{x}_3)) =$

$$= \mathcal{L}\left((x_1+\bar{x}_1,\ x_2+\bar{x}_2\ x_3+\bar{x}_3),\ i(x_1-\bar{x}_1,\ x_2-\bar{x}_2\ x_3-\bar{x}_3) \right)$$

$\in \mathbb{R}^3$ $\qquad\qquad$ $\in \mathbb{R}^3$

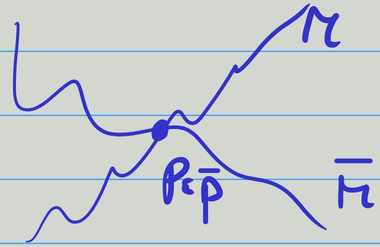
e quindi r ammette una base formata da vettori reali $\Rightarrow$ una rapp. parametrica di r ha coeff. reali $\Rightarrow$ r è reale.

3) Sia r una retta di $\overline{A_2(\mathbb{C})}$

$\Rightarrow$ se $r = \bar{r}$ $\Rightarrow$ r reale e $r \cap \bar{r} = r$

se $r \neq \bar{r}$ $\Rightarrow$ $r \cap \bar{r} = \{P\}$. ma coniugando tutti $\{\overline{P}\} = \overline{r} \cap \overline{\overline{r}} = \overline{r} \cap r = \{P\}$ e quindi

$P = \overline{P}$ é un punto reale $\square$



Che cosa succede alla geometria Euclidea?
(in particolare alla nozione di distanza).

$$\mathcal{E}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{A_2(\mathbb{C})}$$

Se prendiamo punti reali non cambia nulla

In generale possono succedere cose "strane"

<u>Def</u>: In $\widetilde{A_2(\mathbb{C})}$ una retta propria è detta <u>isotropa</u> se passa per uno dei due punti ciclici del piano di coordinate $J_\infty = [(1, i, 0)]$ oppure $\overline{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$.

<u>Teorema</u>: Una retta è isotropa $\iff$ è ortogonale a se stessa ed ogni suo punto è a dist.

$= 0$ da tutti gli altri.

DIM

Sia $P = (p_1, p_2)$ un punto proprio di $\overline{A_2(\mathbb{C})}$

consideriamo il luogo dei punti a distanza r da P. (= circonferenza di centro P e raggio r).

$$(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 = r^2$$

in particolare passando a coord.

omogenee vediamo che l'eq. diventa

$$(x_1 - p_1 x_3)^2 + (x_2 - p_2 x_3)^2 = r^2 x_3^2$$

e intersecando con $x_3 = 0$

otteniamo come punti impropri

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} [(1, i, 0)] = J_\infty \\ [(1, -i, 0)] = \bar{J}_\infty \end{array}$$

i punti ciclici del piano.

→ OGNI CIRCONFERENZA PASSA PER J_∞ e $\bar{J}_\infty$

In particolare se $r_0 = 0$ la nostra eq. diventa in termini affini

$$(x-p_1)^2+(y-p_2)^2=0$$

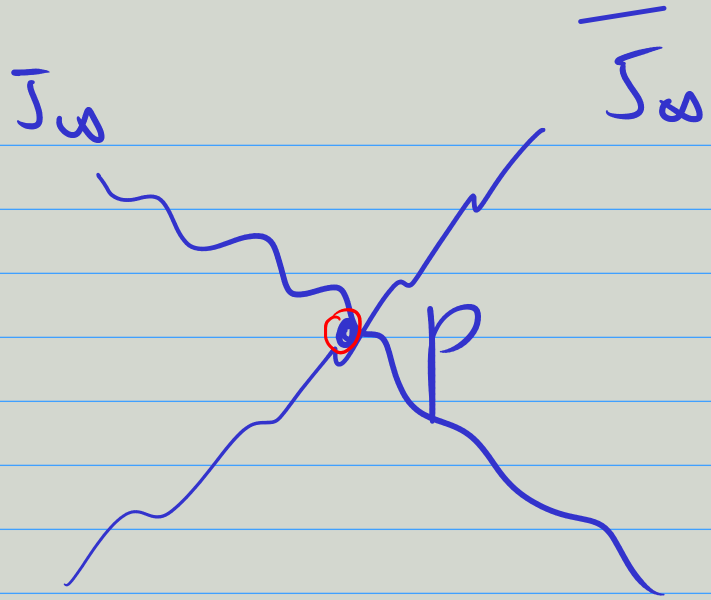
ma questa si spezza in 2 rette.

$$0=[(x-p_1)+i(y-p_2)][(x-p_1)-i(y-p_2)]$$

che passano per I_∞ e $\bar{I}_\infty$

si spezza in 2 rette isotrope.

ed ogni punto di esse è a "distanza" 0 da P



2 rette imm. coniugate che congiungono P con i punti ciclici.

N.B. P è l'unico punto reale di queste 2 rette.

LA DISTANZA EUCLIDEA È UNA DISTANZA SOLO FRA PUNTI REALI E PROPRI.

Esercizio: 1) DIM che se 1 retta

$$y = mx + c$$

é ortogonale a se stessa $\Rightarrow$

$$m = \pm i$$

e la retta é isotropa.

$m^2 = -1$

2) calcolare la distanza euclidea fra 2 punti su di una retta isotropa e mostrare che é $= 0$