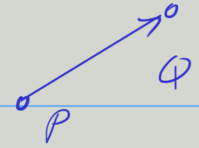
$A_n(\mathbb{K}) \quad \to \quad \mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = (A, V_n^0(\mathbb{R}), f)$



$$d: \begin{cases} A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (P,Q) \longrightarrow \|\vec{PQ}\| \end{cases} \quad \leftarrow \text{distanza euclidea}$$

$$d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$$

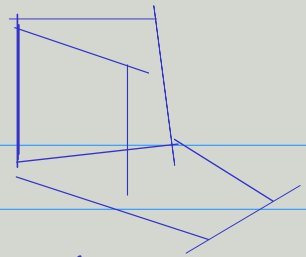
$$d_H = |\{ i \mid x_i \neq y_i \}| = d(P,Q) \qquad P = (x_1 \ldots x_n), \quad Q = (y_1 \ldots y_n)$$

$$d_T = \max \{ |x_i - y_i| \mid i = 1 \ldots n \}$$

poiché abbiamo un prod. scalare abbiamo anche una nozione di ortogonalità.

$$\Pi = [P, W_k] \qquad \Sigma = [Q, W'_e]$$

sono ortogonali $\Leftrightarrow$ $W_k \subseteq W_e'^{\perp}$ oppure $W_k^{\perp} \subseteq W'_e$



Equazioni per spazi ortogonali.

$n=2$ $\quad r: ax+by+c=0$ $\quad$ DIR $((a,b))^{\perp} = \{(l,m) \mid la+mb=0\}$.

$r': a'x+b'y+c'=0$

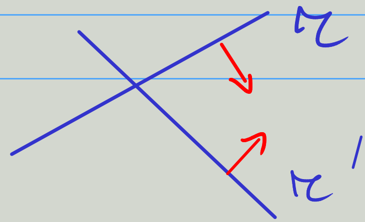
DIR ORTOGONALE AD r è $(a,b)^{\perp\perp} =$

$= \mathcal{L}((a,b))$.

$r' \perp r \iff$ la dir. di $r' = ((a',b'))^{\perp}$ coincide con $\mathcal{L}((a,b)) \iff$

$(a,b) \in ((a',b'))^{\perp} \iff (a,b)\cdot(a',b')=0$

ORT. TRA 2 rette



$n=3$ piani

piani	giaciture
$\pi: \; ax+by+cz+d=0$	$W_2 = ((a\; b\; c))^{\perp}$
$\pi': \; a'x+b'y+c'z+d'=0$	$W_2' = ((a'\; b'\; c'))^{\perp}$

$\pi \perp \pi' \iff \cancel{W_2 \subseteq W_2'^{\perp}}$ oppure impossibile

$W_2^{\perp} \subseteq W_2'$

d'altro canto $\dim W_2 = 2$, $\dim W_2'^{\perp} =$

$= \dim ((a'\,b'\,c'))^{\perp\perp} =$

$= \dim \mathcal{L}((a'\,b'\,c')) = 1$

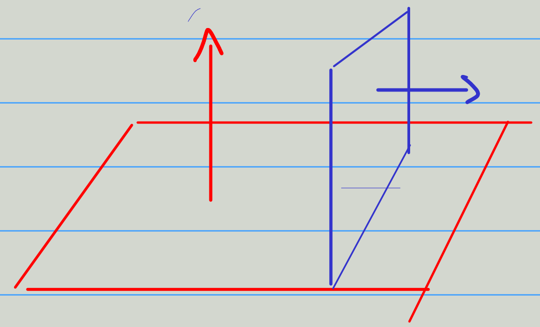
ma $W_2^{\perp} \subseteq W_2'$ è possibile

e questo accade $\iff (a\; b\; c)^{\perp\perp} \subseteq (a'\,b'\,c')^{\perp}$

$\iff \mathcal{L}((a\; b\; c)) \subseteq (a'\; b'\; c')^{\perp} \iff$

$\Leftrightarrow (a\ b\ c) \in (a'\ b'\ c')^{\perp} \Leftrightarrow$

$(a\ b\ c) \cdot (a'\ b'\ c') = 0$



piano e retta sono ortogonali $\Leftrightarrow$ la direzione della retta è quella normale al piano.

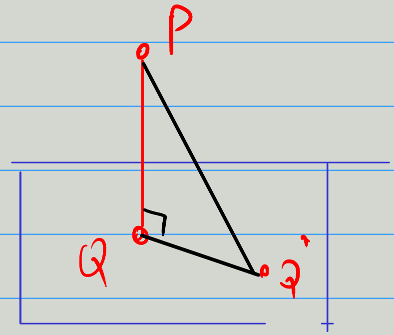
Definito la distanza fra 2 punti e la distanza punto/retta allo stesso modo si definisce la distanza punto/piano o punto/iperpiano

Sia $P \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$, Σ un sottospazio lineare di $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow d(P, \Sigma) = \min \{ d(P, X) \mid X \in \Sigma \}$$

OSS 1) $d(P,\Sigma)=0 \iff P \in \Sigma$

2) $d(P,\Sigma)=d(P,Q)$ ove Q è la proiezione ortogonale di P su Σ, ovvero il punto di Σ tale che la retta PQ sia ortogonale a Σ



$$d(P,Q') \geq d(P,Q)$$

$$d(P,Q')^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,Q')^2$$

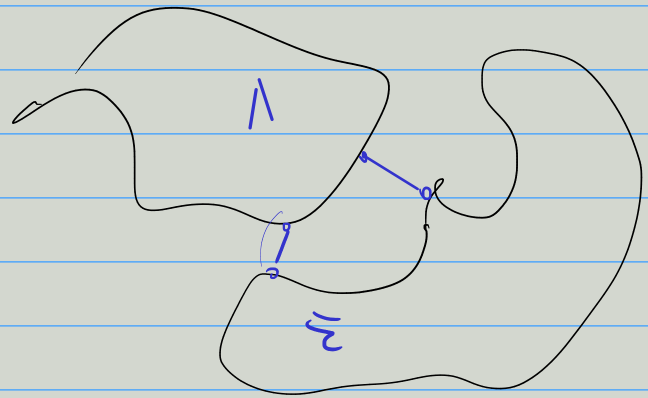
3) Se Σ è un iperpiano di eq

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

e $P \equiv (p_1, \dots, p_n) \Rightarrow d(P,\Sigma) = \dfrac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$

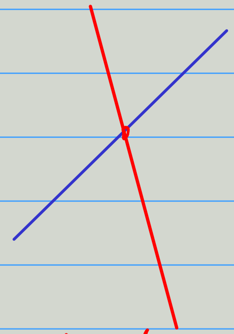
Def Siano $\Lambda, \Sigma \subseteq \mathbb{A}_n$ $\Rightarrow$ definiamo (vorremmo definire)

$$\bullet \; d(\Lambda, \Sigma) = \min \{ d(x,y) \mid x \in \Lambda, y \in \Sigma \}$$



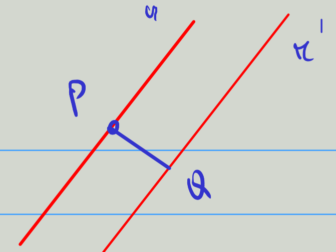
se $\Lambda \cap \Sigma = \emptyset$ può essere una def "sensata"

Se $\Lambda \cap \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow d(\Lambda, \Sigma) = 0$
ma $\Lambda \neq \Sigma$ a priori



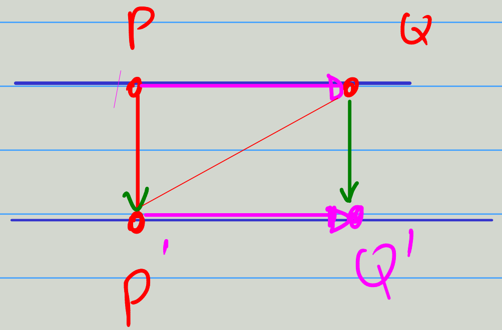
In generale parleremo di distanza solo fra insiemi di punti disgiunti.

In particolare se $n = 2$ parliamo di distanza fra 2 rette parallele.



Teorema: Siano r, r' due rette parallele $\Rightarrow d(r,r') = \min\{d(x,y) \mid x \in r, y \in r'\}$

$= d(P, r') \quad \forall P \in r$



$P \in r, \quad Q \in r$

Sia P' la proiezione ortogonale di P su r' e $Q' = P' + \overrightarrow{PQ} \in r'$

P' è il punto di r' più vicino a P

devo mostrare che Q' è la proiez. ortogonale di Q su r' e dunque anche lui il punto più vicino a Q e $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

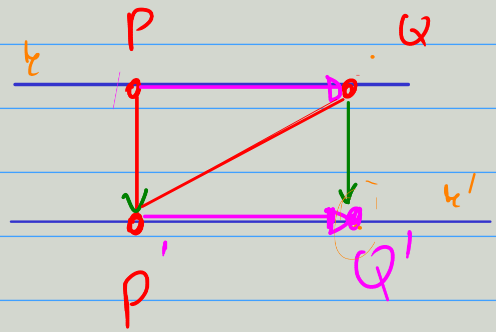
$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ in quanto

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \text{ per costruzione}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PP'}$$

$$\overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{PQ}$$

$$\| \overrightarrow{QQ'} \|^2 = \| \overrightarrow{PP'} \|^2$$

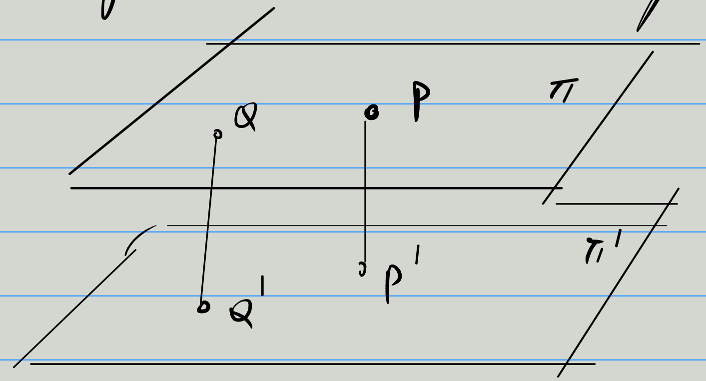


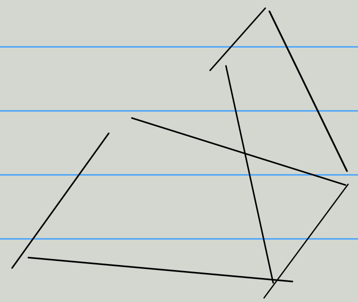
$$\| \overrightarrow{QP'} \|^2 = \cancel{\| \overrightarrow{PQ} \|^2} + \cancel{\| \overrightarrow{PP'} \|^2} = \| \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'} \|^2 =$$

$$= \cancel{\| \overrightarrow{QQ'} \|^2} + \cancel{\| PQ \|^2} + 2\, \overrightarrow{Q'P'} \cdot \overrightarrow{QQ'}$$

$$\Rightarrow \quad 2\, \overrightarrow{Q'P'} \cdot \overrightarrow{QQ'} = 0 \Rightarrow \text{i vettori sono } \perp.$$

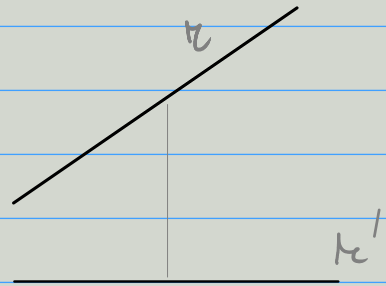
Esattamente lo stesso ragionamento si applica per la distanza di 2 piani paralleli nello spazio.





DISTANZA FRA 2 rette sghembe (e retta di minima distanza)

$n=3$



$$d(r,r') = \min\{d(P,P') \mid P\in r,\ P'\in r'\}$$

Si dice retta di minima distanza fra 2 rette r, r' sghembe in $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ $n\geq 3$ la retta incidente entrambe e ortogonale ad entrambe.

Questa retta congiunge fra loro i punti $R \in r$ e $R' \in r'$ a distanza minima.

Siano r, s due rette sghembe

π e π' i due piani paralleli che contengono rispettivamente r ed s.

$r \subseteq \pi$; $s \subseteq \pi'$.

OSSERVIAMO CHE $\forall P \in r$ la distanza di P da π'

È COSTANTE E LA PROIEZIONE DI P su π'

(diciamo P') è il punto di π' a distanza minima da P.

Se $\exists R' \in s$ tale che R' è proiezione ortogonale di un punto $R \in r \Rightarrow d(R, R') = \min\{d(x,y) \mid x \in \pi, y \in \pi'\} =$

$= \min \{ d(x,y) \mid x \in r, y \in r' \}$.

Troviamo R e R'. come?

Proiettiamo r sul piano π' e osserviamo $r' \nparallel s$

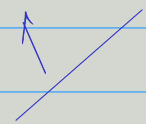
$\Rightarrow$ $r' \cap s = \{R'\}$ con R' proiezione di un punto di R.

$\Rightarrow$ R' $\in$ alla retta di minima distanza.

e similmente il punto corrispondente che è stato proiettato $\Rightarrow$ la retta RR' è ortogonale ad r ed s, incidente entrambe e R ed R' sono i punti di r ed s a distanza minima $\square$

$\bar{v}, \bar{w}$

$$-1 \le \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} \le 1$$



Def: Data una retta r_0 si dicono coseni direttori di r_0 le componenti rispetto una base ortonormale di $V_n^0(\mathbb{R})$ di un versore che descrive la direzione di r.

$$r_0 = [P, \mathcal{L}((a,b))] \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow$ i coseni direttori di r sono

$$\pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

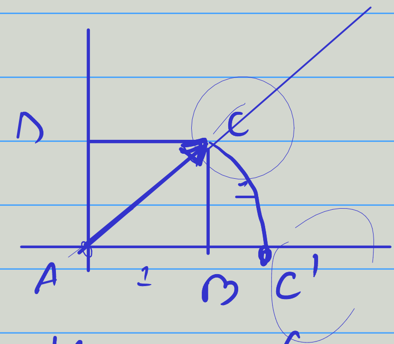
DI VERSORI CE NE SONO SEMPRE 2

$$r_0 = [P, \mathcal{L}((l\ m\ n))]$$

$$\pm\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right)$$

Lavoriamo su $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ perché abbiamo una distanza che é quella "intuitiva"

Ad esempio se dato il quadrato di vertici $(0,0)$ $(1\ 0)$ $(1\ 1)$ $(0\ 1)$



consideriamo il vettore $(0\ 0)-(1\ 1)$

la sua norma é $\sqrt{2}$ $\qquad \sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

vogliamo trovare un punto sulla retta $y=0$ alla stessa distanza da $(0,0)$ di C.

$$\sqrt{2}(1\ 0)=(\sqrt{2},0)$$

In $A_n(\mathbb{K})$ si dice, fissato un riferimento affine, ipersuperficie algebrica di ordine k l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano una equazione del tipo

$$f(x_1 \text{———} x_n) = 0$$

ove $f(x_1 \text{———} x_n)$ è un polinomio in n incognite a coeff. in $\mathbb{K}$ non costante di grado k.

<u>OSS</u> $k = 1$ → iperpiano

$k = 2$ — se $n = 2$ → coniche

$n > 2$ → quadriche

Se $n = 2$ una ipersuperficie algebrica è detta curva algebrica

$n=3$ superficie algebrica.

<u>Def</u>: Si dice varietà algebrica in $A_n(\mathbb{K})$ l'intersezione di ipersuperfici algebriche
↓
sistemi di equazioni (di grado ≥ 1).

Una ipersuperficie (curva/sup.) algebrica si dice riducibile se il polinomio $f(x_1 \text{—} x_n)$ che la descrive si può fattorizzare in fattori di grado ≥ 1 così

$$f(x_1 \text{—} x_n) = h(x_1 \text{—} x_n)\, g(x_1 \text{—} x_n).$$

con $\deg h$, $\deg g \geq 1$.

In particolare in tale caso l'insieme $V(f)$ dei punti della ip di eq. $f=0$ è unione degli intersez. dei punti di $V(g)$ e $V(h)$.

$$V(f) = V(g) \cup V(h).$$

CURVA RIDUCIBILE

$$(x+y-2)(x^2+3x-6y) = 0$$

Def Data $f(x_1 — x_n) = 0$ eq. algebrica di grado k l'eq. omogenea associata é

$$F(x_1 — x_{n+1}) = x_{n+1}^k f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \frac{x_2}{x_{n+1}} — \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

Si dicono punti impropri di $V(f)$ i punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ di eq. $\begin{cases} F = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$

$n=2$ $\qquad y^2+3x-2=0 \rightarrow x_3^2 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)=0$

$$x_3^2\left(\frac{x_2^2}{x_3^2}+3\frac{x_1}{x_3}-2\right)=0$$

$$x_2^2+3x_1x_3-2x_3^2=0$$

pti impropri $\rightarrow \begin{cases} x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ $\quad [(1\ 0\ 0)]$

$$(3x^4-2y+5x)(x+2)=0$$

$\downarrow$

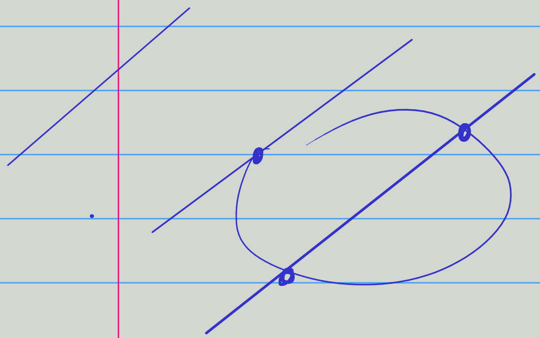
$$x_3^5\left(3\frac{x_1^4}{x_3^4}-2\frac{x_2}{x_3}+5\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_3}+2\right)=0$$

In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$

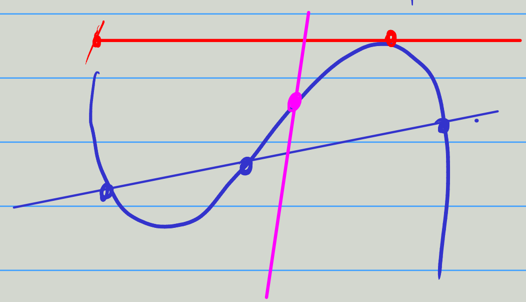
$$x^2+y^2+1=0$$ curva priva di punti reali.

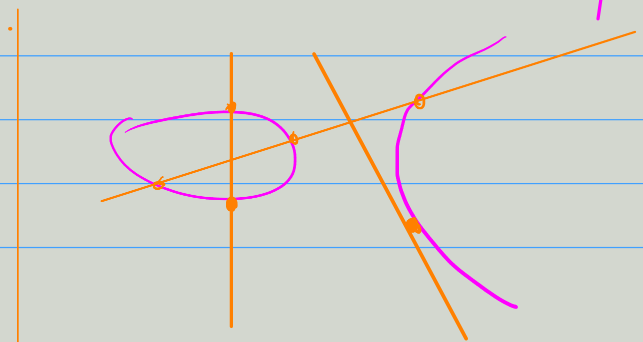
$$3x^2y^2+x^6+2y^4+7=0$$

Teorema dell'ordine



$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$





STUDIAMO LE CURVE ALGEBRICHE PER AVERE UNA IDEA "GEOMETRICA" DELLE EQ DI GRADO ≥ 1 IN 2 INCOGNITE _ DOMANDA: QUALE È IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADO DELL'EQ?

↓

Sì: ci dice come la nostra curva può intersecare una retta a patto di essere nell'ambiente giusto

Teorema

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso (cioè tale che ogni polinomio di grado k a coeff. in $\mathbb{K}$ ha esattamente k radici in $\mathbb{K}$). $\underbrace{\text{Allora}}$ ogni curva algebrica $\mathcal{C}$ di ordine k definita in $\tilde{A}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ interseca ogni retta r_0 di $\tilde{A}_2(\mathbb{K})$ con $r_0 \not\subset \mathcal{C}$ in esattamente k punti a patto di contarli con la debita molteplicità.

DIMOSTRAZIONE SBAGLIATA

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}: \\ r_0: \end{array} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ y = ax+b \end{cases}$$

METTO A SISTEMA

$$\begin{cases} f(x, ax+b) = 0 \\ y = ax+b \end{cases}$$

l'eq. $f(x, ax+b)=0$ è una eq. di grado k in x

$\Rightarrow$ ha k radici $\longrightarrow$ trovo k punti

?!?

DOVE HO SBAGLIATO? (DOVE HO TRASCURATO DELLE POSSIBILITÀ?)