$\varphi : A \cup A_\infty \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ é iniettiva.

Teorema Ip Siano $P, Q \in \widetilde{A(\mathbb{K})}$ con $\varphi(P) = \varphi(Q)$ $\Big] \Leftrightarrow \varphi$ é iniettiva

Ts. $P = Q$

<u>DIM</u> 1) $P, Q \in A$ $P \equiv (x_1 \_\_\_ x_n)$ $Q \equiv (y_1 \_\_\_ y_n)$

$\varphi(P) = [(x_1 \_\_\_ x_n \; 1)]$

$\varphi(Q) = [(y_1 \_\_\_ y_n \; 1)]$

e $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & \_\_\_ & x_n & 1 \\ y_1 & \_\_\_ & y_n & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = x_1 \_\_\_ y_n = x_n \Rightarrow P = Q.$

2) $P \in A$, $Q \in A_\infty$ $P \equiv (x_1 \_\_\_ x_n)$ $Q = [(y_1 \_\_\_ y_n)]$

$\Rightarrow \varphi(P) = \varphi(Q) \Leftrightarrow \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & \_\_\_ & x_n & 1 \\ y_1 & \_\_\_ & y_n & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\Leftrightarrow y_1 = y_2 = \_\_\_ y_n = 0$ ASSURDO

3) $P, Q \in A_\infty$ $\quad P = [(x_1 \_\_\_ x_n)] \quad Q = [(y_1 \_\_\_ y_n)]$

$$\Rightarrow \varphi(P) = \varphi(Q) \Leftrightarrow rk \begin{pmatrix} x_1 & \_\_\_ & x_n & 0 \\ y_1 & \_\_\_ & y_n & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow (y_1 \_\_\_ y_n) \in \mathcal{L}((x_1 \_\_\_ x_n)) \Rightarrow P = Q$$

come direzioni

$\square$

Geometria affine $A_n(\mathbb{K}) \sim \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$

Def. Si dice curva algebrica in $A_2(\mathbb{K})$ l'insieme dei punti di $A_2(\mathbb{K})$ le cui coordinate, fissato un riferimento soddisfano una eq. del tipo

$$f(x,y) = 0$$

con $f(x,y)$ polinomio non costante in x e y.

Si dice <u>ordine</u> di una curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$ il grado (massimo) di $f(x,y)$.

CURVE DEL $\underline{I}$ ordine: grado $= 1$ $\Rightarrow$

$$ax+by+c=0$$

con $(a,b)\neq(0,0)$

rette.

CURVE DEL $\underline{II}$ ordine grado $=2$.

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

con $(a,b,c)\neq(0\ 0\ 0)$.

<u>CONICHE</u>.

Cosa succede passando al proiettivo?

poniamo $x=\dfrac{x_1}{x_3}$ $y=\dfrac{x_2}{x_3}$

e consideriamo l'eq. omogenea associata a

$f(x,y)=0$

data da

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

e la curva corrispondente ha come punti impropri proprio quelli dati da

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo che per le coniche tutto funziona.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$x_3^2 \left(a\left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2 + b\frac{x_1x_2}{x_3^2} + c\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + d\frac{x_1}{x_3} + e\frac{x_2}{x_3} + f \right) = 0$$

eq. omogenea $\rightarrow$ $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$

I punti impropri hanno coord.
$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La geometria affine (punti, rette, piani, etc.) essenzialmente non dipende dal campo su cui si lavora.

[le proprietà che abbiamo visto dipendono dal fatto che $\mathbb{K}$ sia un campo, non da che campo $\mathbb{K}$ sia.]

risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$
su $\mathbb{Q}$.

D'altro canto ci sono proprietà che dipendono dal campo scelto.

→ Teorema dell'ordine

→ Nozioni metriche.

Geometria Euclidea $\Rightarrow$ geometria affine su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in cui il sottospazio vettoriale soggiacente è uno spazio euclideo (ovvero uno s. vett. dotato di prodotto scalare definito positivo).

euclideo

$$\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = A^\circ_n(\mathbb{R}) = (A, V^\circ_n(\mathbb{R}), f)$$

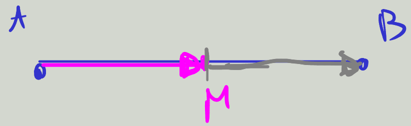
<u>Def</u>: Si dice riferimento euclideo in $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ è un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ in cui $\mathcal{B}$ è una base <u>ortonormale</u> di $V^\circ_n(\mathbb{R})$.

In particolare se $(v_1 \_\_\_ v_n)$ sono le $(w_1 \_\_\_ w_n)$ componenti di 2 vettori $\bar{v}, \bar{w}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + \_\_\_ + v_n w_n.$$

[Uno spazio euclideo é uno spazio in cui si può parlare di distanze fra punti e di ortogonalità fra sottospazi.]

Def. Siano A e B due punti in $A_n(\mathbb{K})$. Si dice punto medio fra A e B il punto $M \in A_n(\mathbb{K})$ tale che $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ovvero $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

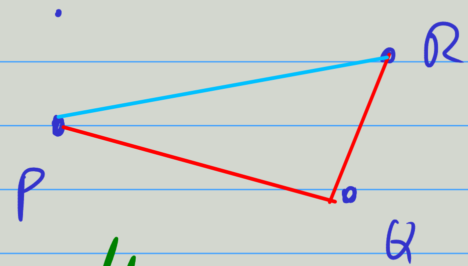


Def In $A_n^{\circ}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ si dice distanza la funzione

$$d \begin{cases} A \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ P, Q \longrightarrow \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}} = \|\vec{PQ}\| \end{cases}$$

Oss:
- $d(P, Q) = 0 \iff \|\vec{PQ}\| = 0 \iff \vec{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
- $d(P, Q) = d(Q, P)$ perché $\|\vec{PQ}\| = \|-\vec{PQ}\| = \|\vec{QP}\|$
- $d(P, Q) + d(Q, R) = \|\vec{PQ}\| + \|\vec{QR}\| \geq \|\vec{PR}\|$

per la disug. triangolare.



In coordinate (rispetto un riferimento euclideo o cartesiano)

$$P = (x_1 \ldots x_n) \qquad Q = (y_1 \ldots y_n)$$

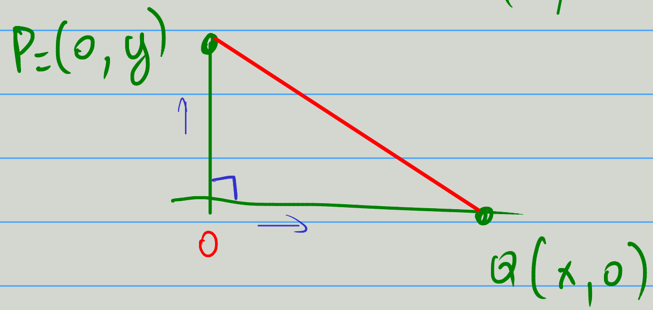
$$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}} =$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

Esempio $n = 2$

$$P \equiv (x, y) \qquad Q = (x', y')$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$



$$d(P,Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(0,P) = \sqrt{y^2} = |y|$$

$$d(0,Q) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Teorema di Pitagora

<u>Def</u> : In $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ due sottospazi lineari

$$\Pi_k = [P, W_k]$$
$$\Pi'_{k'} = [P', W'_{k'}]$$

sono detti ortogonali se $\left\| \begin{array}{l} W_k \subseteq W'^{\perp}_{k'} \\ W_k^{\perp} \subseteq W'_{k'} \end{array} \right\|$ $\Leftrightarrow W'_{k'} \subseteq W_k^{\perp}$

oppure $\Leftrightarrow W'^{\perp}_{k'} \subseteq W_k$

Quando dobbiamo verificare l'ortogonalità studiamo gli spazi di traslazione ovvero i punti impropri.

In generale <u>NON</u> si può dire che un punto è ortogonale ad un altro, ma si può dire che un punto improprio è ortogonale (o uno) ad un altro punto improprio!

$n=2$ $\qquad r: ax+by+c=0$ retta propria $(a,b)\neq(0,0)$.

sottosp. di traslazione = direzione
$= \mathcal{L}((-b,a))$

$$\mathcal{L}((-b,a))^{\perp} = \mathcal{L}((a,b))$$

DIREZIONE ORTOGONALE (O DIREZIONE <u>NORMALE</u>)
AD r è $\mathcal{L}((a,b))$

Una retta ortogonale ad r avrà eq. del tipo

$$-bx+ay+c'=0$$

n:

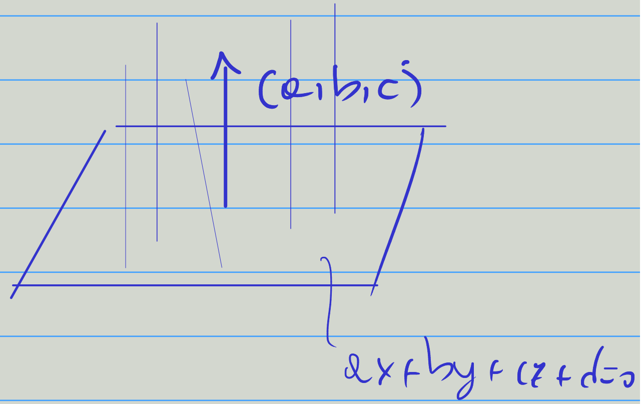
Sia π $ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c) \neq \underline{0}$

un piano in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

ha una giacitura che è data dalle sol. di

$$ax+by+cz=0$$

$$\Rightarrow V_2^{\perp} = \mathcal{L}((a,b,c))$$



Sia r una retta di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

avente direzione $\mathcal{L}((l,m,n))$.

Quando r è ortogonale a π?

$r_0 \perp \pi \iff \mathcal{L}((l,m,n)) \subseteq V_\pi^\perp = \mathcal{L}((a,b,c)) \Rightarrow (l,m,n) = \lambda(a\ b\ c).$

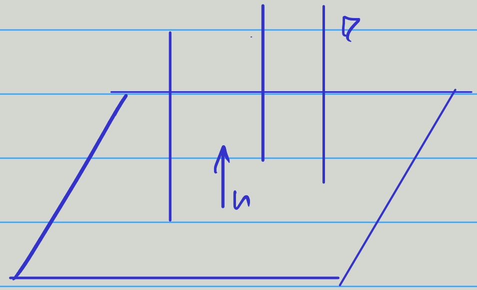
oppure

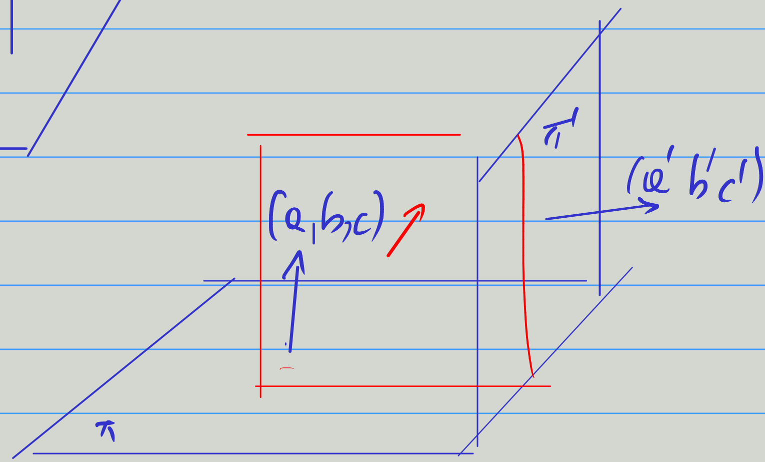
$$\mathcal{L}((l,m,n))^\perp \subseteq \mathcal{L}((a,b\ c))^\perp = V_\pi$$

$\mathcal{L}((l,m,n))^\perp$: ha dim 2

$\mathcal{L}((a,b\ c))^\perp$: ha dim 2

devono coincidere $\Rightarrow (l,m,n) = \lambda(a,b,c)$





Due piani quando sono ortogonali

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

π ha come s. di traslazione $\mathcal{L}((a\ b\ c))^{\perp}$

π' ha come s. di traslazione $\mathcal{L}((a'\ b'\ c'))^{\perp}$

$$\left[\begin{array}{l} \underset{2}{\mathcal{L}((a\ b\ c))^{\perp}} \subseteq \underset{1}{\mathcal{L}((a'\ b'\ c'))^{\cancel{\perp\perp}}} \quad \text{IMPOSSIBILE} \\ \text{oppure} \\ \mathcal{L}((a\ b\ c))^{\cancel{\perp\perp}} \subseteq \mathcal{L}((a'\ b'\ c'))^{\perp} \end{array}\right.$$

ha dim = 1

ok può succedere

ha dim=1 ha dim=2.

In particolare $(a\ b\ c)\cdot(a'\ b'\ c') = 0$

ORTOGONALITÀ FRA 2 RETTE in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

$$r = [P, \mathcal{L}((l, m, n))]$$
$$r' = [P', \mathcal{L}((l' m' n'))]$$

$\Rightarrow$ DEVE essere

$$(l\ m\ n) \cdot (l'\ m'\ n') = 0$$
$$ll' + mm' + nn' = 0$$

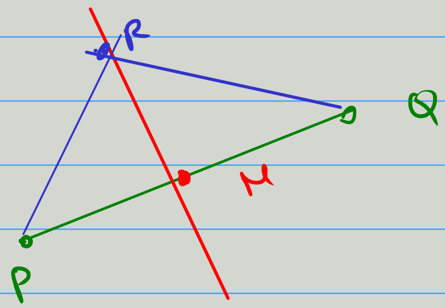
Quale é il legame fra ortogonalità e distanza?

1) <u>Def</u>: Siano in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ P e Q due punti.

Si dice <u>asse</u> del segmento di estremi P e Q il luogo dei punti $R \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ tali che $d(R, P) = d(R, Q)$.

(definizione di un <u>luogo geometrico</u>)

Teorema: L'asse di un segmento di estremi P e Q $(P \neq Q)$ è la retta ortogonale alla direzione $\mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$ e passante per il punto medio fra P e Q.



DIM: Supponiamo che sia $d(P,R) = d(Q,R) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(P,R)^2 = d(Q,R)^2$$

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{QR}\|^2$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MR} \qquad \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR}$$

con M punto medio del segmento P e Q.

$$\|\vec{PR}\|^2 = (\vec{PM}+\vec{MR})\cdot(\vec{PM}+\vec{MR}) = \|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 + 2\vec{PM}\cdot\vec{MR}$$

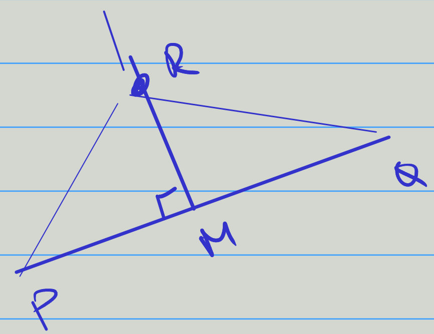
$$\|\vec{QR}\|^2 = (\vec{QM}+\vec{MR})\cdot(\vec{QM}+\vec{MR}) =$$

in quanto $\vec{QM} = -\vec{PM}$

$$= (-\vec{PM}+\vec{MR})\cdot(-\vec{PM}+\vec{MR}) = \|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 - 2\vec{PM}\cdot\vec{MR}$$

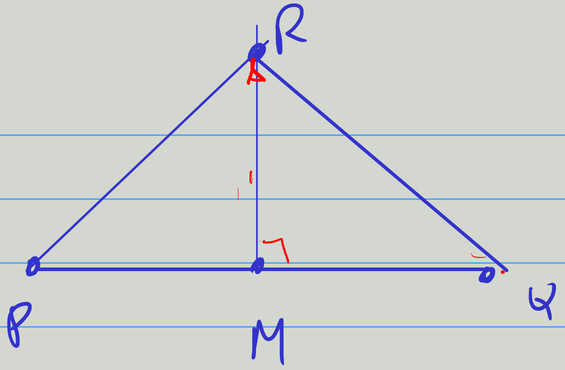
ma $\|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{QR}\|^2 \Rightarrow 4\vec{PM}\cdot\vec{MR} = 0$ e dunque

$\vec{PM} \perp \vec{MR}$



Viceversa supponiamo $\vec{PM} \perp \vec{MR} \Rightarrow$ mostriamo che ogni R sulla retta per M e di direzione data è equidistante da P e Q.

→ Teorema di pitagora:



$\vec{PM} \perp \vec{MR}$

$$\|\vec{PR}\|^2 = (\vec{PM} + \vec{MR}) \cdot (\vec{PM} + \vec{MR}) = \|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 + \cancel{2\vec{PM} \cdot \vec{MR}}$$ $= 0$ perché

$$\|\vec{QR}\|^2 = (\vec{QM} + \vec{MR}) \cdot (\vec{QM} + \vec{MR}) =$$

$$= (-\vec{PM} + \vec{MR}) \cdot (-\vec{PM} + \vec{MR}) = \|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 - \cancel{2\vec{PM} \cdot \vec{MR}}$$ $= 0$ per lo stesso motivo

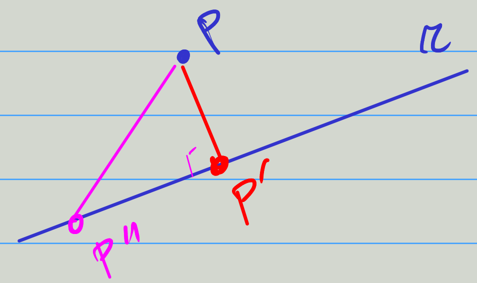
$$\Rightarrow \|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{QR}\|^2$$

□

Per $n=3$ il ragionamento è analogo ma si ottiene un piano ortogonale alla direzione $\vec{PQ}$ e passante per il punto medio.

Tale piano è detto <u>piano assiale</u> del segmento. □

Def: Sia r una retta in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ e P un punto. Si dice <u>proiezione ortogonale</u> di P su r il punto $P' \in r$ tale che $\overrightarrow{PP'}$ è ortogonale ad r.



Teorema: $\forall\, P'' \in r$: $d(P, P'') \geq d(P, P')$

(cioè la proiezione ortogonale su r è il punto di r più vicino a P).

DIM: Sia $P'' \in r \Rightarrow d(P, P'')^2 = \overrightarrow{PP''} \cdot \overrightarrow{PP''} =$

$$= (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''}) \cdot (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''}) =$$

$$= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'P''}\|^2 + 2\,\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{P'P''} = 0$$

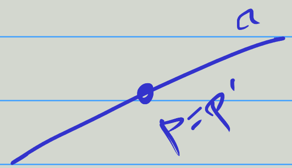
ma $\vec{PP'} \cdot \vec{P'P''} = 0$ perché sono ortogonali

$$\|\vec{PP''}\|^2 = \|\vec{PP'}\|^2 + \|\vec{P'P''}\|^2 \geq \|\vec{PP'}\|^2$$

$\square$

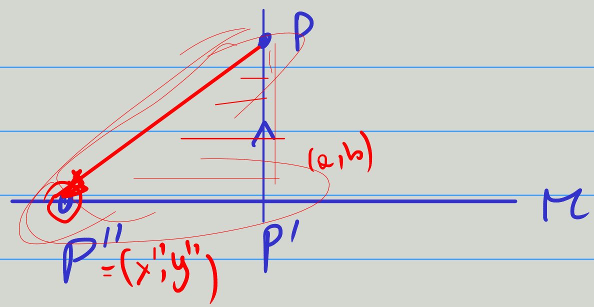
Def: Si dice <u>distanza di un punto</u> P da una retta r il minimo delle distanze $d(P, P')$ con $P' \in r$.

In particolare se $P \in r \Rightarrow$ la distanza di P da r è 0; in generale la distanza di P da r è la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale P' su r.



Teorema: Sia $r: ax+by+c=0$ $(a,b) \neq (0,0)$ una retta e $P = (x_0, y_0)$ un punto. $\Rightarrow d(P, r) = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vogliamo calcolare $d(P, r)$



osserviamo innanzi tutto che la direzione normale ad r è data da $\mathcal{L}((a,b))$

e sia $P'' \in r$

$$\vec{PP''} = \vec{PP'} + \vec{P'P''} \quad \text{ove}$$

$\vec{PP'}$ é proporzionale ad (a,b) mentre $\vec{P'P''}$ é ortogonale.

calcoliamo la proiezione di $\vec{PP''}$ lungo $\vec{PP'}$ e questa è $\vec{PP'}$

la dir di

$$\vec{PP'} = \frac{\vec{PP''} \cdot (a,b)}{(a,b) \cdot (a,b)} (a,b)$$

$$d(P,r) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{|\overrightarrow{PP''}\cdot(a,b)|}{(a,b)\cdot(a,b)}\|(a,b)\| = \frac{|\overrightarrow{PP''}\cdot(a,b)|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (*)$$

$\to$ calcolare

calcoliamo $\overrightarrow{PP''}\cdot(a,b)$ osservando che se le coordinate di P sono (x_0,y_0) e le coord. di P'' sono (x'',y'') $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{PP''} = (x''-x_0, y''-y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PP''}\cdot(a,b) = a(x''-x_0)+b(y''-y_0) =$$

$$= (ax''+by'') - (ax_0+by_0)$$

d'altro canto $P'' \in r \Rightarrow$ $\boxed{ax''+by''+c=0}$

$$\Rightarrow ax''+by'' = -c$$

$$\Rightarrow \left|\vec{PP'} \circ (a, b)\right| = \left| -ax_0 - by_0 - c \right| = \left| ax_0 + by_0 + c \right|$$

Sostituendo in $(*)$

$$d(r, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\square$