

Geometria Affine $\rightarrow$ Geometria Ampliata
(proiettiva).

$$A_n(K) = (A, V_n(K), f)$$

$\downarrow$ $\square$ affine

$$A_n(K) \cong (K^n, \underbrace{K^n}_{\text{coordinate}}, f(x, y) = y - x)$$

Σ_k sottospazi lineare di

$$A_n(K) \quad \Sigma = [T, W_k] \subseteq K^n$$

$$= T + W_k = \{T + X \mid X \in W_k\}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 punto vettori

punti = elementi di K^n

vettori = elementi di K^n

$\downarrow$
 direzioni = sottospazi 1-dim di K^n

Def. Si dicono punti impropri di $A_n(K)$ le direzioni delle rette di $A_n(K)$.

OSS. Ogni direzione corrisponde ad un sottospazio 1-dim. di $\mathbb{R}^n$

↓
le si può descrivere fornendo una qualsiasi base di questo
sottospazio $\Rightarrow$ è descritta da un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$
a meno di coeff. di proporzionalità $\neq 0$

$$v_i = [(0,0), L((1,2))] \quad \rightarrow \quad L((1,2)) = L((1,4)) \text{ e } L((1,2)) = L((2,4)) \text{ e } L((1,2)) = L((2,6)) \text{ e } L((1,2)) = L((3,6)) \text{ e } L((1,2)) = L((4,8)) \text{ e } L((1,2)) = L((5,10)) \text{ e } L((1,2)) = L((6,12)) \text{ e } L((1,2)) = L((7,14)) \text{ e } L((1,2)) = L((8,16)) \text{ e } L((1,2)) = L((9,18)) \text{ e } L((1,2)) = L((10,20)) \text{ e } L((1,2)) = L((11,22)) \text{ e } L((1,2)) = L((12,24)) \text{ e } L((1,2)) = L((13,26)) \text{ e } L((1,2)) = L((14,28)) \text{ e } L((1,2)) = L((15,30)) \text{ e } L((1,2)) = L((16,32)) \text{ e } L((1,2)) = L((17,34)) \text{ e } L((1,2)) = L((18,36)) \text{ e } L((1,2)) = L((19,38)) \text{ e } L((1,2)) = L((20,40)) \text{ e } L((1,2)) = L((21,42)) \text{ e } L((1,2)) = L((22,44)) \text{ e } L((1,2)) = L((23,46)) \text{ e } L((1,2)) = L((24,48)) \text{ e } L((1,2)) = L((25,50)) \text{ e } L((1,2)) = L((26,52)) \text{ e } L((1,2)) = L((27,54)) \text{ e } L((1,2)) = L((28,56)) \text{ e } L((1,2)) = L((29,58)) \text{ e } L((1,2)) = L((30,60)) \text{ e } L((1,2)) = L((31,62)) \text{ e } L((1,2)) = L((32,64)) \text{ e } L((1,2)) = L((33,66)) \text{ e } L((1,2)) = L((34,68)) \text{ e } L((1,2)) = L((35,70)) \text{ e } L((1,2)) = L((36,72)) \text{ e } L((1,2)) = L((37,74)) \text{ e } L((1,2)) = L((38,76)) \text{ e } L((1,2)) = L((39,78)) \text{ e } L((1,2)) = L((40,80)) \text{ e } L((1,2)) = L((41,82)) \text{ e } L((1,2)) = L((42,84)) \text{ e } L((1,2)) = L((43,86)) \text{ e } L((1,2)) = L((44,88)) \text{ e } L((1,2)) = L((45,90)) \text{ e } L((1,2)) = L((46,92)) \text{ e } L((1,2)) = L((47,94)) \text{ e } L((1,2)) = L((48,96)) \text{ e } L((1,2)) = L((49,98)) \text{ e } L((1,2)) = L((50,100))$$

$$\text{DIREZIONE } [(1,2)] = \{ \alpha(1,2) \mid \alpha \neq 0 \}$$

Data una retta r_0 si dice punto improprio di r_0 la
sua direzione, cioè il sottospazio che si ottiene
risolvendo il sistema omogeneo associato che descrive r_0 .

$$\begin{array}{lcl} n:1 & ax+by+c=0 & \xrightarrow{\text{direzione}} \text{sol. di } ax+by=0 \\ & & \text{punti propri} = \text{sol. di } ax+by+c=0 \end{array}$$

Definiamo la geometria proiettiva $\widetilde{A}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$
 di dim. n su $\mathbb{K}$ nel modo seguente

I punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ sono le classi di
 equivalenza di vettori non nulli di $\mathbb{K}^{n+1}$
 rispetto alla relazione

$$(x_1 \text{ --- } x_{n+1}) \sim (y_1 \text{ --- } y_{n+1}) \Leftrightarrow \exists k \left(\begin{matrix} x_1 & \text{---} & x_{n+1} \\ y_1 & \text{---} & y_{n+1} \end{matrix} \right) = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 & \text{---} & x_{n+1} \\ y_1 & \text{---} & y_{n+1} \end{pmatrix}$$

in altre parole $\exists \alpha \neq 0$ tale che

$$(x_1 \text{ --- } x_{n+1}) = \alpha (y_1 \text{ --- } y_{n+1})$$

In altre parole i punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ corrispondono
 ai sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$

$$\downarrow$$

$$\forall [(x_1 \text{ --- } x_{n+1})] \in \frac{(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})}{\sim} \quad \text{si ha } [(x_1 \text{ --- } x_{n+1})] \vee \{0\} \leq \mathbb{K}^{n+1}$$

Si $\dim = 1$ e viceversa: $\forall W \subseteq \mathbb{A}^n$ con $\dim W = 1$
 $W \setminus \{0\} \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$

$$\text{Si } \psi: \begin{cases} \widetilde{A_n(\mathbb{A}^n)} & \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{A}^n) \\ P & \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} \text{se } P = (x_1, \dots, x_n) \text{ proprio} \rightarrow [(x_1, \dots, x_n, 1)]_n \\ \text{se } P = [(l_1, \dots, l_n)] \text{ improprio} \rightarrow [(l_1, \dots, l_n, 0)]_n \end{cases}$$

$$n=2 \quad \begin{aligned} P = (x, y) &\longrightarrow [(x, y, 1)]_n \\ [(l, m)] &\longrightarrow [(l, m, 0)] \end{aligned}$$

Verifichiamo che ψ è una bijezione

Siano P, Q due punti propri e supponiamo

$$\psi(P) = \psi(Q) \quad \text{e} \quad P = (x, y) \quad Q = (x', y')$$

$$\Rightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} x-x' & y-y' & 0 \\ x' & y' & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow x=x', y=y' \Rightarrow P=Q.$$

2) Un punto proprio e un punto improprio hanno vicinamente 2 app. differenti.

3) Se $\angle(\ell, m) = \angle(\ell', m')$ se due pli impropri coincidono $\Rightarrow$

$$\psi(\ell(\ell, m)) = [\ell \ m \ 0] =$$

$$= [\ell' \ m' \ 0] \text{ in qualche}$$

$$\angle(\ell, m) = \angle(\ell', m') \Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} \ell & m & 0 \\ \ell' & m' & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow [\ell \ m \ 0] = [\ell' \ m' \ 0]$$

$$3) \text{ Dato } \bar{v} = \left[\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{n+1} \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

$$\text{con } (v_1 \dots v_{n+1}) \neq 0$$

se $v_{n+1} = 0 \Rightarrow \bar{v}$ corrisponde al punto improprio
 $\mathcal{L}((\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n))$

se $v_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \bar{v}$ corrisponde al punto proprio

$$\left(\frac{v_1}{v_{n+1}} \quad \frac{v_2}{v_{n+1}} \quad \dots \quad \frac{v_n}{v_{n+1}} \right)$$

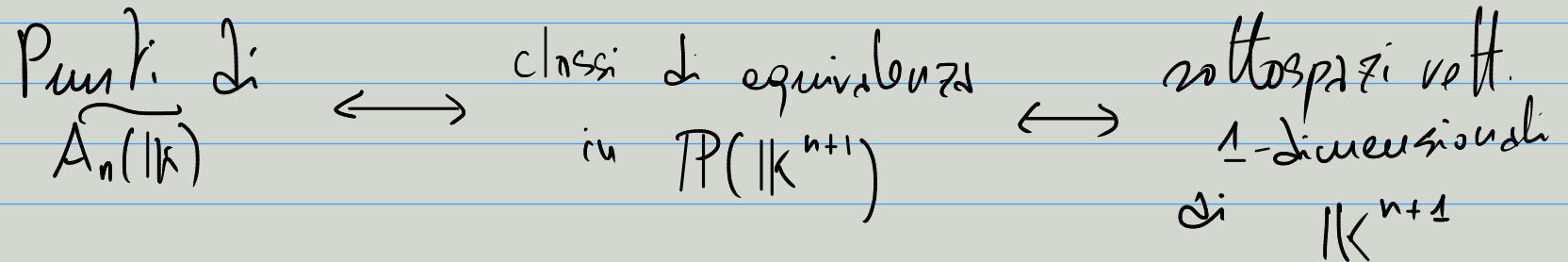
e quindi ψ è invertibile

$$n=3 \text{ esempio } \bar{v} = \left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$$

$$\text{se } x_4 = 0 \Rightarrow \psi^{-1}(\bar{v}) = \mathcal{L}((x_1, x_2, x_3))$$

Se $x_n \neq 0 \Rightarrow$ poniamo $x = \frac{x_1}{x_n}$ $y = \frac{x_2}{x_n}$ $z = \frac{x_3}{x_n}$

$$\psi^{-1}(\bar{v}) = (x \ y \ z).$$



punti $\rightarrow P = (x_1 \dots x_n) \in A_n \longleftrightarrow [(x_1 \dots x_n \ 1)] \longleftrightarrow \boxed{L((x_1 \dots x_n \ 1))}$
 direzioni $\rightarrow D = L((v_1 \dots v_n)) \in A_\infty \longleftrightarrow [(v_1 \dots v_n \ 0)] \longleftrightarrow \boxed{L((v_1 \dots v_n \ 0))}$

DUE TIPI DI
OGGETTI

UN TIPO DI
OGGETTI
 $\downarrow$
SOTTOSPACI
VETTORIALI.

Vediamo per $n=2$ cosa succede all'eq. di una retta

(*) $\rightarrow r: ax + by + c = 0$

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad x_3 \neq 0$$

$$a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0 \quad (x_3 \neq 0)$$

(*)' $\rightarrow [ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0] \quad (x_3 \neq 0)$ equazione omogenea dei punti propri della retta.

$\downarrow$
cosa succede se $x_3 = 0 \rightarrow$ punto $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

sistema omogeneo in 2
eq. e 3 incognite

$$\Rightarrow \mathcal{L}((-b, a, 0))$$

$[(-b \ a \ 0)]$
punto improprio

↓
è la direzione della
retta $\Rightarrow$ è il punto
improprio di π .

(*)'' $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

↓
le soluzioni di
questa equazione sono
un sottospazio vett.
di dim 2 di $\mathbb{K}^3$
chiamato W .

in particolare $P(W)$
l'insieme dei sottospazi 1-dim di W

è la eq. omogenea della
retta π

↳ le classi di autosoluzioni con
 $x_3 \neq 0$ corrispondono ai punti
propri di π

↳ le classi di autosoluzioni con
 $x_3 = 0$ corrispondono al
punto improprio di π = DIREZIONE

(che corrisponde alle c.l. di eq. di vettori $\neq 0$
a meno di coeff. di proporzionalità)
corrisponde proprio ai punti della retta
ampliata!

Una retta ampliata di $\widetilde{A_2(K)}$ corrisponde ad un
sottospazio 2-dimensionale di $K^{n+1} = K^3$

Lo stesso ragionamento si applica in generale
agli iperspazi.

Def: In $TP(K^{n+1})$ si dice sottospazio proiettivo
di ~~dimensione t~~ l'insieme $TP(W)$ di tutte
le classi di eq. di vettori $\neq 0$ a meno di
un coeff. di proporzionalità $\neq 0$ appartenenti a $W \subseteq K^{n+1}$
con $\dim(W) = t+1$

t = dimensione proiettiva
 $t+1$ = dimensione vettoriale

S_x	dim. proiettiva	dim. vettoriale	NOME
	0	1	<u>punti</u>
	1	2	rette
	2	3	piani
	3	4	solidi
	$n-1$	n	iperpiani

In particolare per $n=2$ l'eq. omogenea $x_3=0$ in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$
 descrive una retta detta retta impropria.

per $n=3$ l'eq. omogenea $x_4=0$ in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$
 descrive un piano detto piano improprio.

per $n=3$ osserviamo che dato le eq. di un piano
proprio

$$ax + by + cz + d = 0$$

↓

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$$

↓

se studiamo i punk. impropri

otteniamo il sistema
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

e questi sono una retta che
corrisponde alla giacitura del piano →
retta impropria del piano.

Più in generale, dato un sottospazio affino di dim = k

in $A_n(\mathbb{K})$, l'insieme dei noi punti impropri corrisponde alle direzioni contenute nel uno sottospazio di traslazione ed è un sottospazio proiettivo di dimensione $k-1$ (dim. vettoriale = k)

Teorema: In $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) \cong \widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ due rette ℓ_1 e ℓ_2 si intersecano sempre in un punto. Se il punto è proprio non incidenti in $A_2(\mathbb{K})$; altrimenti parallele.

Dim: [Siano R_1 e R_2 i due sott. vettoriali di $\mathbb{K}^3$ che rappresentano le rette. $\dim R_1 = \dim R_2 = 2$

Per Grassmann.

$$\dim(R_1 \cap R_2) \geq \dim R_1 + \dim R_2 - 3 \\ = 2 + 2 - 3 = 1 \quad \square$$

Teorema: In $\widetilde{A}_3(\mathbb{K}) \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$ due piani si intersecano sempre in almeno una retta.

Se la retta è impropria (e sono piani propri) $\Rightarrow$ sono paralleli. Altrimenti sono parte di un fascio proprio.

Dim.: Siano W, W' i due spazi che rapp. i piani

$$\dim(W \cap W') \geq \dim(W) + \dim(W') - 4 = \\ = 3 + 3 - 4 = 2$$

In $\widetilde{A}_4(\mathbb{K}) \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^5)$ due piani hanno sempre un punto in comune

$$\dim(W \cap W') \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

n generico e riduco $P = [(x'_1 \text{ --- } x'_{n+1})]$
 $Q = [(x''_1 \text{ --- } x''_{n+1})] \in \mathbb{P}(K^{n+1})$

$P \neq Q$

come è fatta la retta per P e Q ?

è $\mathbb{P}(W)$ dove $\dim(W) = 2$

e $(x'_1 \text{ --- } x'_{n+1}), (x''_1 \text{ --- } x''_{n+1}) \in W$

ma $\text{rk} \begin{pmatrix} x'_1 & \text{---} & x'_{n+1} \\ x''_1 & \text{---} & x''_{n+1} \end{pmatrix} = 2$

$L((x'_1 \text{ --- } x'_{n+1}), (x''_1 \text{ --- } x''_{n+1}))$.

$0 \leq \dim(W \cap W') \leq 2$

e $\dim W = \dim W' = 2$ e $\dim(W \cap W') = 2$
 $\Rightarrow W = W'$.

equazione della retta r per P e Q .

$X = [(x_1 \text{ --- } x_{n+1})] \in r \Leftrightarrow$

$$(x_2 \text{ --- } x_{n+1}) \in \mathcal{L}((x_1' - x_{n+1}'), (x_1'' - x_{n+1}''))$$

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} x_2 \text{ --- } x_{n+1} \\ x_1' \text{ --- } x_{n+1}' \\ x_1'' \text{ --- } x_{n+1}'' \end{pmatrix} = 2$$

se conditions point. propri, P_e & row propri.

$$x_{n+1} = x_{n+1}' = x_{n+1}'' = 1$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_2 \text{ --- } x_n & 1 \\ x_1' \text{ --- } x_n' & 1 \\ x_1'' \text{ --- } x_n'' & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Not ridus

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ p & m & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

piano per 3 punti in $\widetilde{A_3(K)} = \mathbb{P}(K^4)$

propri

$$\kappa \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_n'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_n''' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{eq. omogenea}$$

In $A_2(K)$

Fascio proprio = Fascio con centro un punto proprio

Fascio improprio = Fascio di rette con centro un punto improprio

Un fascio di $\left\{ \begin{array}{l} \text{rette in } \widetilde{A_2(\mathbb{K})} \\ \text{piani in } \widetilde{A_3(\mathbb{K})} \end{array} \right\}$ è un

insieme di $\left\{ \begin{array}{l} \text{rette} \\ \text{piani} \end{array} \right\}$ le eq. omogenee dei cui

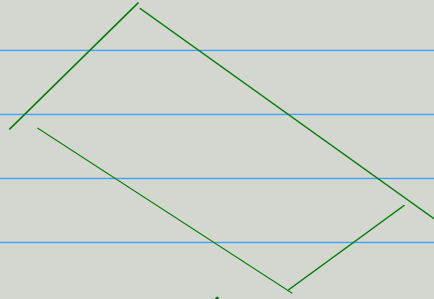
elementi formano un sottospazio vett. di $\dim = 2$
di $\mathbb{K}^{n+1}$ ma elementi proporzionali ^{non nulli} definiscono
lo stesso oggetto geometrico

In particolare un fascio di $\left\{ \begin{array}{l} \text{rette} \\ \text{piani} \end{array} \right\}$

corrisponde ad una retta di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Una stella in $\widetilde{A_3(\mathbb{K})} \rightarrow$ corrisponde ad un
"piano" in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$

• P



Le rette per un punto in $A_2(k)$ sono tante
quante i punti su di una retta semplice

Le rette per un punto in $A_3(k)$ sono tante quanti
i punti su di un piano semplice.

