Geometria analitica = Geometria Affine
+
Riferimento Affine

Sottospazi affini (sottospazi lineari) $\rightarrow$ sistemi di equazioni lineari compatibili.

$\downarrow$

rette $\rightarrow$ sistemi con ∞^1 soluzioni

piani $\rightarrow$ sistemi " ∞^2 soluzioni

iperpiani $\rightarrow$ " " ∞^{n-1} soluzioni in n incognite

1) [In particolare un iperpiano é sempre descritto da 1 equazione lineare in n incognite.

2) Ogni sottospazio lineare si descrive come intersezione di iperpiani di $A_n(\mathbb{k})$.

$\Rightarrow$ "ogni equazione del sistema che lo descrive corrisponde ad un iperpiano"

Posizioni reciproche di un piano ed una retta in $A_3(\mathbb{k})$

$$r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \pi: a''x+b''y+c''z+d''=0$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \qquad rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

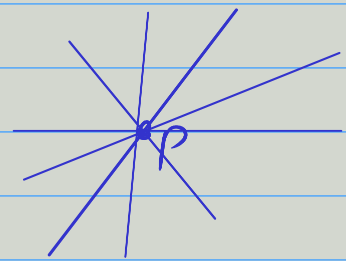
$rk(A)$	$rk(A\|B)$	$\#S$	
2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$] $r /\!/ \pi$
2	3	0	$r \cap \pi = \emptyset$] $r /\!/ \pi$
3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$.

Lo studio della parte omogenea di un sistema ci dice come sono messi i sottospazi di traslazione (parallelismo, etc.). → il sistema totale come è fatta l'intersezione.

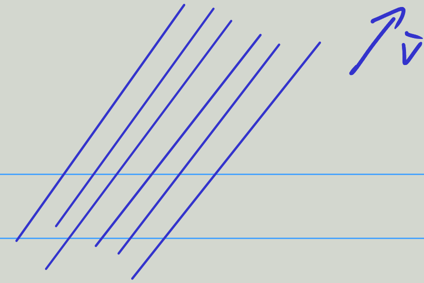
Fascio di < piani / rette

Stella di piani

Nel piano $A_2(\mathbb{K})$ si dice <u>fascio proprio</u> di rette l'insieme di tutte le rette che passano per un punto P detto centro del fascio.



Si dice fascio improprio di rette l'insieme di tutte le rette che hanno una direzione assegnata



Come si rappresentano i fasci di rette?

Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto fissato in $A_2(\mathbb{R})$

cerchiamo rette $ax + by + c = 0$ tali che

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

eq. di I grado in 3 incognite

$\rightarrow \infty^2$ soluzioni. $\rightarrow$ ma eq. proporzionali determinano la medesima retta $\Rightarrow$ ci sono ∞^1 rette nel fascio.

$x + y + z = 0 \qquad 2(x + y + z) = 0$

Fascio $\rightarrow \infty^1$ oggetti definiti da 1 equazione omogenea in

($n=2$)

$n+1$ incognite che ho ∞^2 soluzioni ma noi dobbiamo considerare gli enti geometrici e questi corrispondono alle autosoluzioni a meno di coeff. di proporzionalità.

Def: In $A_3(\mathbb{K})$ si dice fascio proprio di piani l'insieme di tutti i piani che passano per una retta data (centro del fascio); fascio improprio l'insieme di tutti i piani con giacitura assegnata (= piani paralleli ad un piano assegnato).

Si dice stella di piani l'insieme di tutti i piani che passano per un punto assegnato

Troviamo le soluzioni

$$c = -ax_0 - by_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax + by - ax_0 - by_0 = 0$$

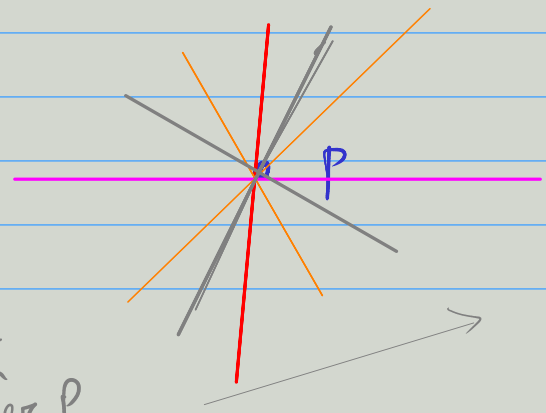
$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

$$a, b \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

eq. del fascio di rette per $P \equiv (x_0, y_0)$.

Notiamo che le equazioni sono combinazione lineare delle 2 equazioni $(x-x_0)=0$ $(y-y_0)=0$

OSS: In realtà ogni retta del fascio proprio di centro P é c. lineare di 2 qualsiasi rette distinte per P



l'insieme delle eq. delle rette per P é uno sp. vettoriale di dim 2 su $\mathbb{K}$ a cui si devo togliere il vettor nullo

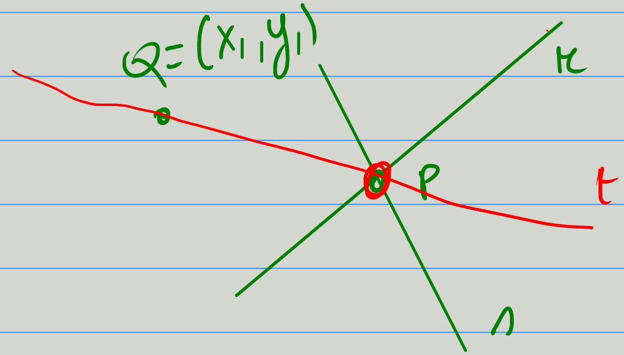
Siano $r: ax+by+c=0$

$s: a'x+b'y+c'=0$

due rette distinte e non parallele.

$\Rightarrow F: \alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

è l'equazione della generica retta per $r\cap s=P$



osserviamo che se $P=(x_0,y_0)\in r\cap s$

$\Rightarrow ax_0+by_0+c=0=a'x_0+b'y_0+c'$

$\Rightarrow \alpha(ax_0+by_0+c)+\beta(a'x_0+b'y_0+c')=0$

$\Rightarrow P\in t$.

Inoltre sia Q un punto generico del piano diverso da P di coordinate (x_1,y_1). $\Rightarrow$ considero la retta ottenuta ponendo $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tali che

$$\alpha(ax_1 + by_1 + c) + \beta(a'x_1 + b'y_1 + c') = 0$$

sistema lineare omogeneo in (α, β) con ∞^1 soluzioni $\Rightarrow \exists$ autosoluzioni $\Rightarrow \exists$ la retta cercata.

a retta che non sia $ax_1 + by_1 + c = a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$

$\square$

Fascio improprio

$\bar{v} = (l, m)$ il vettore che da la direzione $\Rightarrow$ la generica retta di direzione $\mathcal{L}(\bar{v})$ ha equazione

$ax + by + c = 0$

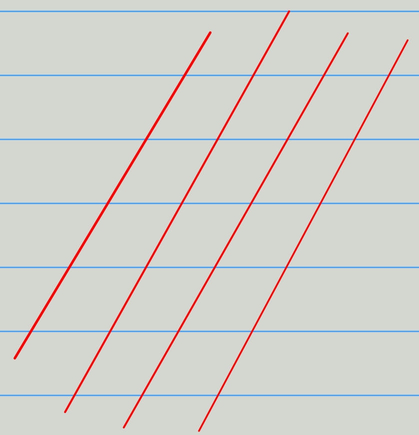
con $\begin{cases} al + bm = 0 \\ \quad\quad c \quad = c \end{cases}$

vediamo che si hanno

per (a, b, c) ∞^2 delle soluzioni

però definite a meno di coeff. di proporzionalità $\Rightarrow \infty^1$ rette.

$ax + by + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$



hanno tutte gli stessi parametri direttori

Def.: In $A_3(\mathbb{K})$ si dice <u>fascio</u> proprio di piani l'insieme di tutti i piani che passano per una retta data (centro del fascio); <u>fascio</u> improprio l'insieme di tutti i piani con giacitura assegnata (= piani paralleli ad un piano assegnato).

Si dice <u>stella di piani</u> l'insieme di tutti i piani che passano per un punto assegnato

Sia r $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ una retta

cerchiamo tutti i piani π con $r \subseteq \pi$

$$a''x+b''y+c''z+d=0$$ equazione che vogliamo.

$P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ $Q \equiv (x_1, y_1, z_1)$

$\in r$ con $P \neq Q$

$\Rightarrow rk \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{cases} a''x_0+b''y_0+c''z_0+d=0 \\ a''x_1+b''y_1+c''z_1+d=0 \end{cases}$$

se $P, Q \in \pi \Rightarrow r \subseteq \pi$

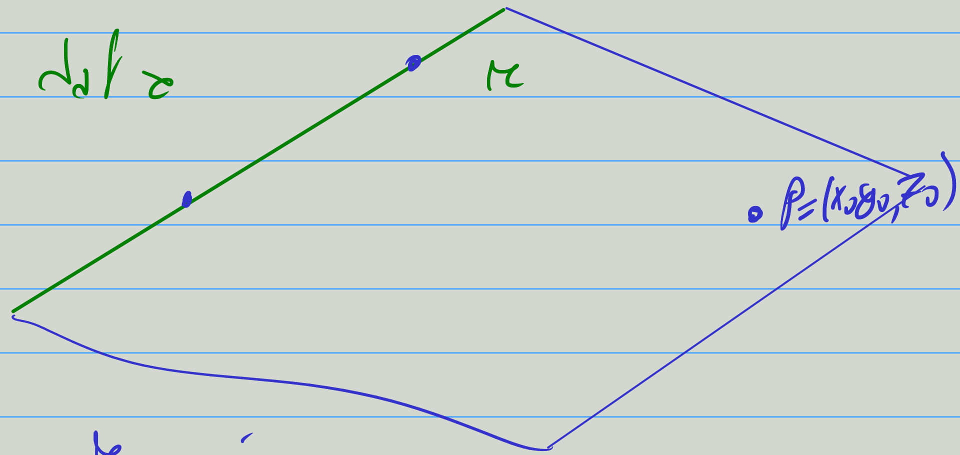
sist. lineare di 2 eq in 4 incognite indip.

∞^2 sol. $\rightarrow$ a meno di prop. ∞^2 piani.

Teorema: ogni piano del fascio per $r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ ha equazione della forma

$$(*) \qquad \alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

DIM: Sia r la retta data



Un piano generico per r è determinato univocamente assegnando un punto $P \notin r$

$\Rightarrow$ in particolare

$$\alpha(ax_0+by_0+cz_0+d)+\beta(a'x_0+b'y_0+c'z_0+d)=0$$

ammette sols soluzione e quindi il piano è rappr. da una eq. del tipo (*).

Viceversa ogni eq. (*) rappresenta un piano per r con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Fascio improprio. $\alpha(ax+by+cz)+k=0 \quad k\in K$

considriamo un piano $\pi: ax+by+cz+d=0$

la sua giacitura è data dalle soluzioni di $ax+by+cz=0$ ma dunque un piano parallelo al piano dato $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deve avere $rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix}=1 \Rightarrow$

$(a',b',c')\underset{\alpha\neq 0}{=}\alpha(a,b,c) \Rightarrow$ ha eq. $\alpha(ax+by+cz)+k=0$ $\square$

PROPRIA | IMPROPRIA

Stella di rette / Stella di piani → | Tutte le rette per un punto assegnato / tutte le rette parallele ad una retta data

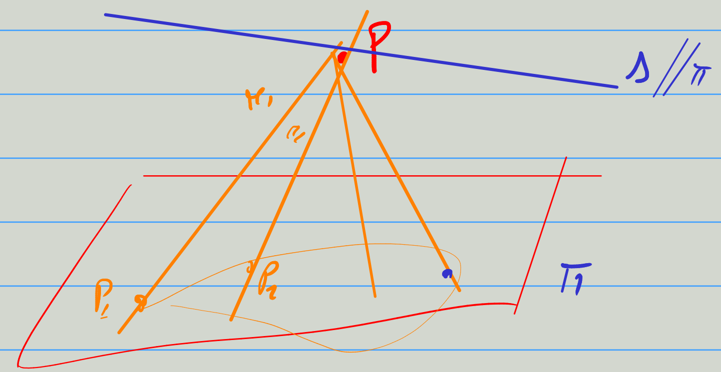
in $A_3(\mathbb{K})$

∞^2 rette

| tutti i piani per un punto assegnato | tutti i piani la cui giacitura contiene una direzione assegnata

∞^3 equazioni a meno di un coeff. di proporzionalità

∞^2 piani



punti impropri di π

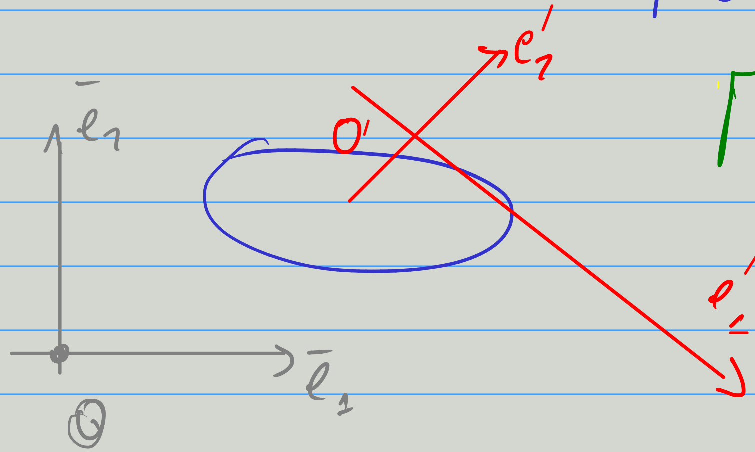
esiste una biezione fra le rette per P e l'insieme

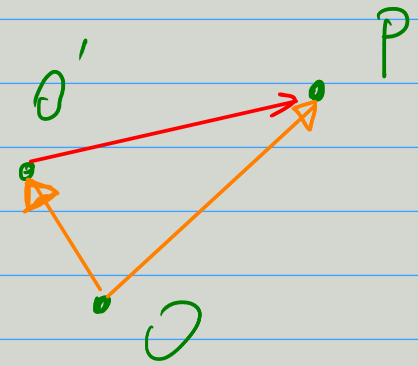
$\{$Punti di $\pi\} \cup \{$direzioni nella giacitura di $\pi\}$

N.B: Quando introduciamo le coordinate in $A_n(\mathbb{K})$ dobbiamo sempre ricordarci che stiamo effettuando una scelta arbitraria.

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

$$\Gamma' = (O', \mathcal{B}')$$





X = componenti di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\mathcal{B}$

X' = componenti di $\overrightarrow{O'P}$ rispetto a $\mathcal{B}'$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ | \\ e_n \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ | \\ \bar{e}_n' \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} o_1 \\ | \\ o_n \end{pmatrix}$$

$$\left[\overrightarrow{OO'} = {}^tT E \qquad \overrightarrow{O'P} = {}^tX' E' \qquad \overrightarrow{OP} = {}^tX E \right]$$

$$\begin{aligned} {}^tX E = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} &= {}^tT E + {}^tX' E' = \\ &= {}^tT E + {}^tX' A E = \\ &= \left(T + {}^tX' A \right) E \end{aligned}$$

$${}^tX = \left(T + {}^tX' A \right) \Rightarrow \boxed{X' = {}^tA^{-1} X - {}^tA^{-1} T}$$

Una trasformazione del tipo $X' = CX + D$ $\det C \neq 0$

corrisponde ad un cambiamento di base

e "lascia la geometria invariata"

Ampliamento proiettivo.

Sia $A_n = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine

Si dicono punti impropri di A_n le direzioni delle rette di A_n ovvero i sottospazi 1-dimensionali di $V_n(\mathbb{K})$. Indichiamo con A_∞ l'insieme di questi "punti".

Si dice retta impropria l'insieme di tutte le direzioni di un piano

piano improprio l'insieme di tutte le direzioni di uno spazio.

etc.

Si dice sottospazio improprio di dim m l'insieme di tutti i sottospazi 1-dimensionali di un $W \leq V_n(\mathbb{K})$

con $\dim W = m+1$

<u>Def</u>: Data una retta r si dice punto improprio di r r_∞ la sua direzione.

Dato un piano π si dice retta impropria di π l'insieme di tutti i punti impropri contenuti nella sua giacitura.

Dato un solido Σ di $\dim = 3$ si dice piano improprio di Σ l'insieme di tutti i punti impropri contenuti nel suo sottospazio di traslazione

Fascio improprio di rette nel piano = tutte le rette per un punto improprio

Fascio improprio di piani in A_3 = tutti i piani che passano per una retta impropria fissata

Stella impropria di $\left\langle \begin{matrix} \text{piani} \\ \text{rette} \end{matrix} \right.$ → $\left. \begin{matrix} \text{piani} \\ \text{rette} \end{matrix} \right\rangle$ che passano per un punto improprio

N.B In $A_2(\mathbb{K}) \cup A_\infty = \widetilde{A_2}(\mathbb{K})$ due rette distinte hanno sempre un punto in comune

1) sono incidenti → punto proprio

2) sono parallele → hanno la stessa dir →

si intersecano nel loro punto
improprio $\Rightarrow$ punto all'infinito