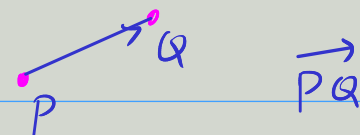


Spazi Affini $A_n = (A, V_n(K), f)$



$$\Gamma = (U, B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n))$$

$\Phi_r: A \rightarrow K^n$ che associa ad ogni punto P
le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto a B.

$\Rightarrow \Phi_r$ è una bijezione.

Φ_r si "comporta bene" rispetto le traslazioni

$P, Q \in A \Rightarrow$ il vettore $\vec{PQ}$ ha come componenti rispetto
a B proprio $\Phi_r(Q) - \Phi_r(P)$

in altre parole se $\bar{v} \in V_n(K)$ ha componenti rispetto
B date da $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_n)$

$$\Rightarrow \Phi_r(P + \bar{v}) = \Phi_r(P) + \tilde{v}$$

A priori noi non richiediamo direttamente nulla su A
e sullo s.vett. $V_n(K)$.

In realtà fissato Γ noi possiamo identificare $A_n(K) = (A, \underbrace{V_n(K)}_n, \underbrace{p}_n)$
con

$$\rightarrow \left[\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punti}}}{K^n}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettori}}}{K^n}, \tilde{p} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \tilde{p}: K^n \times K^n \rightarrow K^n \\ (P, Q) \rightarrow Q - P \end{array}$$

$A_2(K)$

- fissato un riferimento affine Γ c'è una corrispondenza fra
sottospazi lineari (affini) e insiemi di soluzioni di
sistemi lineari compatibili in n incognite.

$AX = B$ compatibile $\rightarrow \tilde{S} = \{X \mid AX = B\}$ è l'insieme delle

coordinate dei punti di un sottospazio lineare

$$S = [P, W] \quad \text{ove}$$

P ha coordinate X_0 con X_0 soluz. particolare
di $AX=B$ W sono i vettori di $V_n(k)$

le cui componenti sono elementi di

$$\tilde{W} = \text{Ker } A = \{Z \mid AZ = 0\}$$

In particolare il sottospazio di traslazione è dato da
 $\text{Ker } A_{\perp}$

Studiare le posizioni reciproche di 2 rette nel piano e
nello spazio di dim $n \geq 3$

Teorema: in $A_2(\mathbb{K})$ due rette sono disgiunte se e solo se sono parallele e distinte.

DIM Fissiamo un rif. affine. Siano r_0 ed r_1 due rette $\rightarrow$ (una retta è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in (x, y) con 2 soluzioni $\Rightarrow$ una retta in $A_2(\mathbb{K})$ è descritta da una eq. del tipo $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned} r_0: & \quad ax + by + c = 0 \\ r_1: & \quad a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned}$$

Vogliamo studiare $r_0 \cap r_1 \rightarrow$ mettiamo a sistema le equazioni

$$(*) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad A|B = \begin{pmatrix} a & b & | & c \\ a' & b' & | & -c' \end{pmatrix}$$

Supponiamo $\ell \cap s = \emptyset \Rightarrow (*)$ non ha soluzioni

$$1 \leq \text{rk}(A) < \text{rk}(A|B) \leq 2$$

l'unica possibilità è $\text{rk}(A) = 1$, $\text{rk}(A|B) = 2$

ma questo significa che (a, b) e (a', b')

sono proporzionali $\Rightarrow$ $ax + by = 0$ ha le stesse
soluzioni di $a'x + b'y = 0$

cioè gli spazi di traslazione di ℓ e di s
(= direzioni) sono uguali $\Rightarrow \ell \parallel s$.

Viceversa: due spazi paralleli e distinti sono sempre disgiunti.

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

$\text{rk}(A) = 1$ perché le
rette sono parallele.

Se fosse $\text{rk}(A|B) = 1 \Rightarrow$ il sistema ammetterebbe
inf. sol $\Rightarrow r = 1$ e perché $c \neq 0$

$\Rightarrow \text{rk}(A|B) = 2 \neq \text{rk}(A)$ e il sistema non ha soluzioni

cioè $r \cap s = \emptyset$

□

Teorema: Siano $(x_0, y_0)^{P}$, $(x_1, y_1)^{Q}$ due punti distinti
di $A_2(1k) \Rightarrow \exists!$ retta r che passa per essi.

Dim. Una retta ha eq. $ax + by + c = 0$.

Se passa per P e $Q \Rightarrow$

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo in 3 incognite
 (a, b, c) di 2 eq.

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix}$$

ma $\text{rk}(A) = 2$ perché se $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$
 c'è sempre un minore 2×2 con $\det \neq 0$

se $x_0 \neq x_1$ $\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}$ altrimenti $\begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ il sistema ha ∞^1 soluzioni tutte proporz.
 fra loro.

Ogni soluzione ci dà una equazione

$$ax + by + c = 0$$

equivalente a tutte le altre $\Rightarrow$ la retta è
unica $\square$

OSS: Ogni retta in $A_2(1k)$ si rappresenta con a^2
terme (a, b, c) tutte proporzionali fra loro a
meno di un $\lambda \neq 0$.

Ogni punto si rappresenta con una coppia (x, y)

Equazione della retta per 2 punti in $A_2(1k)$.

Siano $P = (x_0, y_0)$ $Q = (x_1, y_1) \in A_2(1k)$

con $P \neq Q$.

$\Rightarrow$ ogni punto $(x, y) \in \Gamma$ con $\Gamma =$ retta per P e Q

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x - x_0 \\ y_1 - y_0 & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

vettore $\leftarrow$ che genera
la retta

$\downarrow$
vettore fisso
un punto generico
e P

$\swarrow$
dunque deve essere proporzionale

$$(x_1 - x_0)(y - y_0) = (x - x_0)(y_1 - y_0)$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$

equazione della retta per
2 punti

dove se $x_1 = x_0$ si legge l'eq. come $x = x_0$

più in generale, in $A_n(k)$.

$$P = (p_1 \text{ --- } p_n) \quad Q = (q_1 \text{ --- } q_n)$$

$$rk \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & x_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & x_2 - p_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_n - p_n & x_n - p_n \end{pmatrix} = 1$$

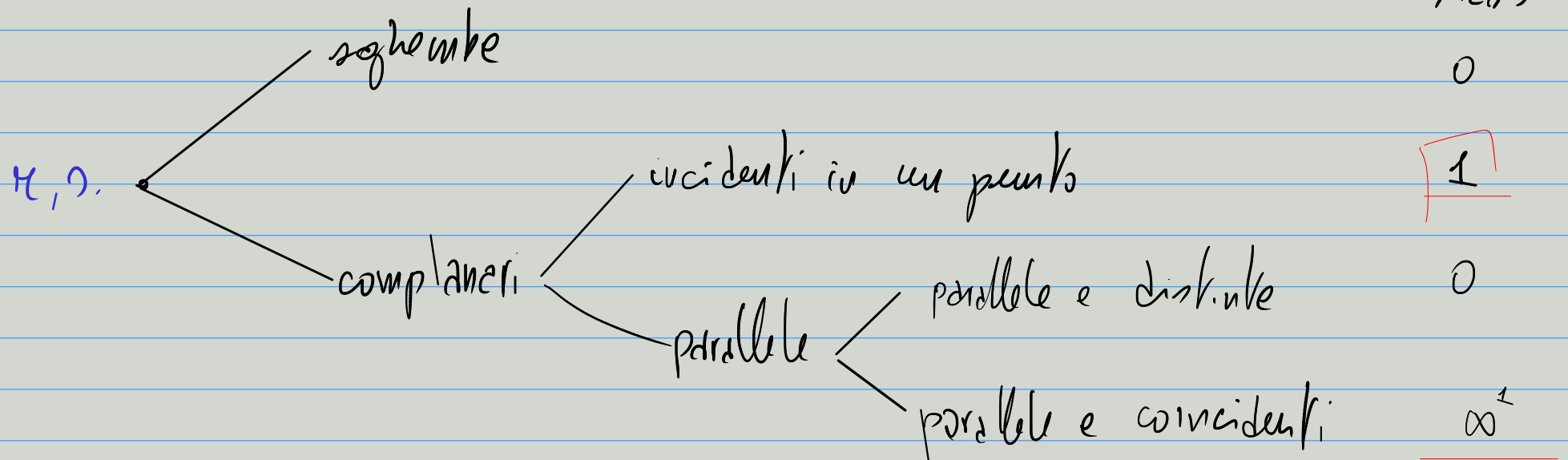
questo è equivalente al sistema $\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{q_n - p_n}$
(*)

$(p_1 \text{ --- } p_n)$ è soluzione di (*)

$(q_1 \text{ --- } q_n)$ è soluzione di (*)

e (*) è un sistema che ha ∞^2 soluzioni $\square$

posizioni reciproche di 2 rette in $\mathbb{A}_n(K)$ n.d.



Si ha $AX=B$ il sistema che descrive α e $A'X=B'$ quello che descrive β .

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = n-1$$

$$\text{rk}(A') = \text{rk}(A'|B') = n-1$$

studiamo rk . $\Rightarrow$ sistema $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}$

	$n-1 \leq \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} \leq n$	$n-1 \leq \text{rk} \begin{pmatrix} A B \\ A' B' \end{pmatrix} \leq n+1$	$\#$	
$\text{rk} = 0$	<u>$n-1$</u>	$n-1$	∞	$\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ matrice con n colonne e $2n-2$ righe.
$\text{rk} // 0$	$n-1$	n	0	
$\text{rk} n = \{p\}$	n	n	1	$\begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}$ matrice con 1 colonna e $2n-2$ righe.
rk, n sghemba	n	$n+1$	0	

• se $\text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = n-1 = \text{rk}(A) \Rightarrow$ il sistema lineare omogeneo

$AX = \underline{0}$ è equivalente al sistema lineare omogeneo $A'X = \underline{0} \Rightarrow \text{rk} // 0$ con $\text{rk} n = \emptyset$

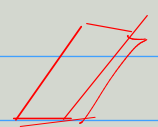
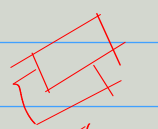
- se $\text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = n \neq \text{rk}(A) \Rightarrow$ lo spazio (direzione) $AX = \underline{0}$ è diverso da $A'X = \underline{0} \Rightarrow \pi$ ed π' hanno direzioni differenti e non si intersecano $\Rightarrow \pi$ ed π' sono sghembe.

045 $\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \text{rk}(A) = n-1$

Posizione reciproca di 2 piani in $A_3(K)$ $n=3$

$$\begin{aligned} \pi: ax + by + cz + d &= 0 & \text{con } (a, b, c) &\neq (0, 0, 0) \\ \pi': a'x + b'y + c'z + d' &= 0 & (a', b', c') &\neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

studiamo $\pi \cap \pi' \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

$1 \leq rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \leq 2$	$1 \leq rk \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \leq 2$	# soluzioni
1	1	∞^2 
1	2	0 
2	2	∞^1 

Interpretazione geometrica:

- 1) Due piani si intersecano, hanno in comune almeno una retta (∞^2 punti in comune).
- 2) Due piani sono disgiunti $\Rightarrow rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$

in particolare hanno quindi la stessa giacitura perché essa è data dalle sol. dell'eq. omogenea associata e tale eq. è equivalente per π e π' .

$\pi \cap \pi'$

incidenti in una retta

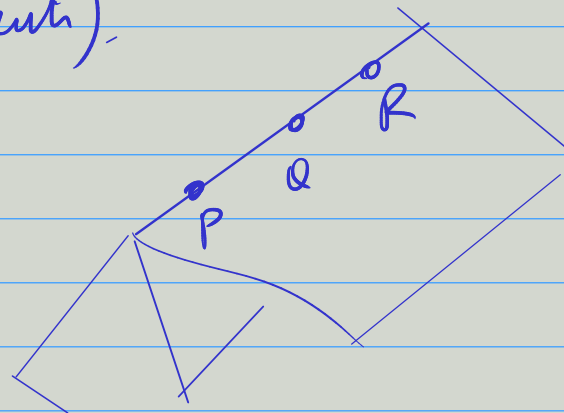
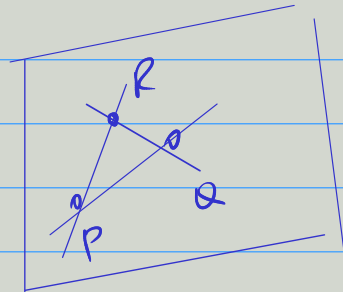
$$\kappa(A) = \kappa(A|B) = 2$$

paralleli ($\kappa(A) = 1$)

coincidenti $\kappa(A|B) = 1$

disgiunti $\kappa(A|B) = 2$

Equazioni di un piano per 3 punti non collineari
(ed eq. di collinearità di 3 punti).



• 3 punti in $A_2(1/k)$

$$P = (p_1, p_2)$$

$$Q = (q_1, q_2)$$

$$R = (r_1, r_2)$$

sono collineari

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

infatti sottraendo la I riga alla II e alla
terza il det diventa

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & 0 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0$$

in $A_3(K)$ sono collineari $(p_1 \ p_2 \ p_3) \ (q_1 \ q_2 \ q_3) \ (r_1 \ r_2 \ r_3)$

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \textcircled{1} \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\pi / \kappa \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_1 & q_3 - p_1 & 0 \\ \pi_1 - p_1 & \pi_2 - p_1 & \pi_3 - p_1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

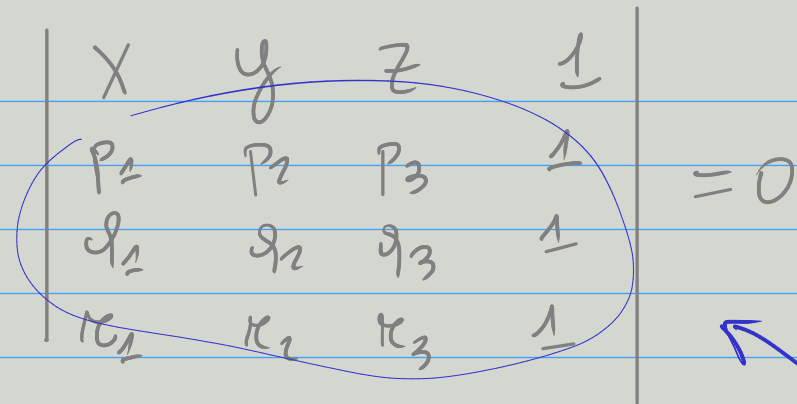
↑

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_1 & 0 \\ \pi_1 - p_1 & \pi_2 - p_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{etc.}$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_1 \\ \pi_1 - p_1 & \pi_2 - p_1 \end{vmatrix} = 0$$

Piano per 3 punti non allineati $X = (x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 1 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$


Modo veloce: $P, Q, R \in$ allo spazio con eq.

poiché il rango è sempre almeno 3.

ci sono ∞^2 soluzioni $\Rightarrow$ questo
spazio è proprio il piano che contiene
 P, Q, R □

Modo PIÙ LENTO

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 1 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

è equivalente a dire

$$\begin{vmatrix} X-P_1 & Y-P_2 & Z-P_3 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 1 \\ Q_1-P_1 & Q_2-P_2 & Q_3-P_3 & 0 \\ R_1-P_1 & R_2-P_2 & R_3-P_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} X-P_1 & Y-P_2 & Z-P_3 \\ Q_1-P_1 & Q_2-P_2 & Q_3-P_3 \\ R_1-P_1 & R_2-P_2 & R_3-P_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\xrightarrow{\vec{PX}}$
 $\xrightarrow{\vec{PQ}}$
 $\xrightarrow{\vec{PR}}$

Geometricamente significa che $\vec{PX}$ deve essere c. lineare di $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$ $\Leftrightarrow X \in [P, \mathcal{L}(\vec{PQ}, \vec{PR})]$
 quindi X appartiene al piano per P, Q ed R .

posizioni reciproche di un piano π ed una retta in $A_3(K)$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{piano.}$$

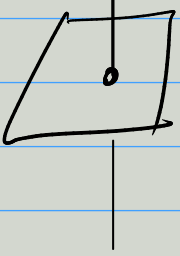
$$r: \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{retta}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 = \text{rk} \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

METTIAMO TUTTO A SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

	$2 \leq rk(A) \leq 3$	$2 \leq rk(A B) \leq 3$	
$\pi // \pi$	2	2	$\infty^1 \Rightarrow \pi \subseteq \pi$ 
	2	3	0 $\pi // \pi$ 
	3	3	1 soluzione 

$$rk(A) = 2 = rk \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \Rightarrow \text{in particolare}$$

l'eq. della giacitura del piano è dipendente
dalle eq. della dir. della retta.

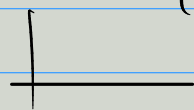
Ogni vettore nella dir. della retta sta nella
giacitura del piano $\Rightarrow \pi // \pi$

CONSEGUENZE

1) Se una retta r è disgiunta da un piano $\pi \Rightarrow$
 $r // \pi$

2) Se una retta interseca un piano in almeno 2
punti $\Rightarrow r \subseteq \pi$

(se ci sono 2 soluzioni $\Rightarrow$ ce ne sono ∞^1).



In dimensione $n \geq 1$ come si descrive uno spazio
di dimensione $n-1$ (cioè un iperpiano).

Sia $p = (p_1 \text{ --- } p_n)$ un suo punto (origine)

e $\bar{v}_1 = (v_{11} \text{ --- } v_{1n})$ $\bar{v}_2 = (\bar{v}_{21} \text{ --- } \bar{v}_{2n})$ $\bar{v}_{n-1} = (v_{n-1,1} \text{ --- } v_{n-1,n})$

le componenti dei vettori che generano il suo sott.
di traslazione

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ v_{11} & & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1,1} & \dots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

Se invece abbiamo $p_1 \dots p_n$ punti indip. del
nostro iperpiano (cioè punti tali che i vettori
 $\vec{p_1 p_2}, \vec{p_1 p_3} \dots \vec{p_1 p_n}$ siano indip.

$\Rightarrow$ l'eq. si scrive anche come

$$\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ p_{11} & \dots & p_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$