$A_n(\mathbb{K})$

Assiomi di Euclide

Proposizione 9.2.1. In $A_n(K)$, con $n \geq 2$,

1. per due punti distinti passa una e una sola retta (Postulato della Geometria Elementare);
2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa uno e un solo piano;
3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele;
4. per un punto passa una e una sola retta, parallela a una retta data (noto come V Postulato di Euclide);190
CAPITOLO 9. SPAZI AFFINI
5. per un punto passa uno e un solo piano, parallelo a un piano dato;
6. per tre punti, non allineati, passa uno e un solo piano (Postulato della Geometria Elementare);
7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano (Postulato della Geometria Elementare);
8. per un punto passano, almeno, due rette distinte.

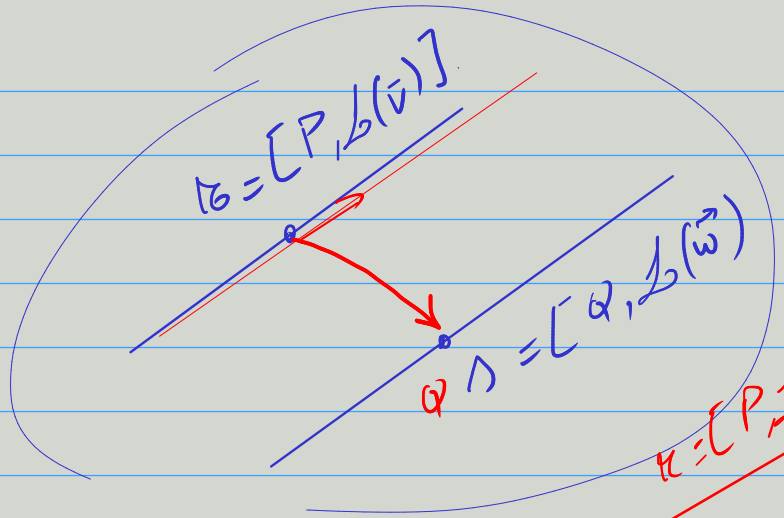
Assiomi della geometria Euclidea li abbiamo "nascosti" nella definizione di spazio vettoriale su di un campo e la definizione di $A_n(\mathbb{K})$

DIM: Siano $P, Q \in \mathcal{A}$ due punti distinti

$$r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$$

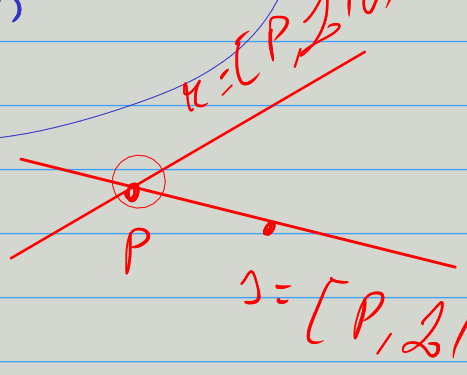
$$Q \in r \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{v}) \text{ ma } \overrightarrow{PQ} \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\bar{v}) = \mathcal{L}(\vec{PQ})$.



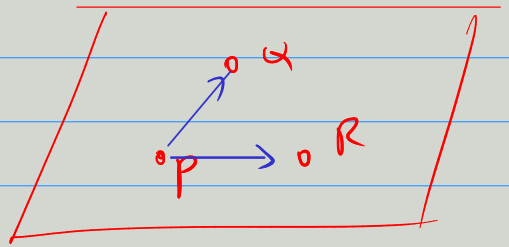
parallele $\Rightarrow \mathcal{L}(\bar{v}) = \mathcal{L}(\bar{w})$.

$\pi = [P, \mathcal{L}(\bar{v}, \vec{PQ})]$

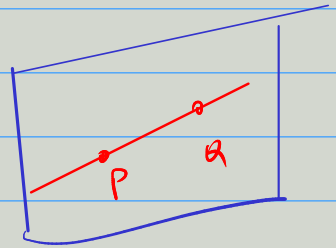


con $\mathcal{L}(\bar{v}) \neq \mathcal{L}(\bar{w})$

$\Rightarrow \pi = [P, \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})]$



$\pi = [P, \mathcal{L}(\vec{PQ}, \vec{PR})]$ e $\vec{PQ}, \vec{PR}$ sono lin indip.



$r = [P, \mathcal{L}(\bar{v})]$ no π_2

$\pi = [P, W_2]$ piano.

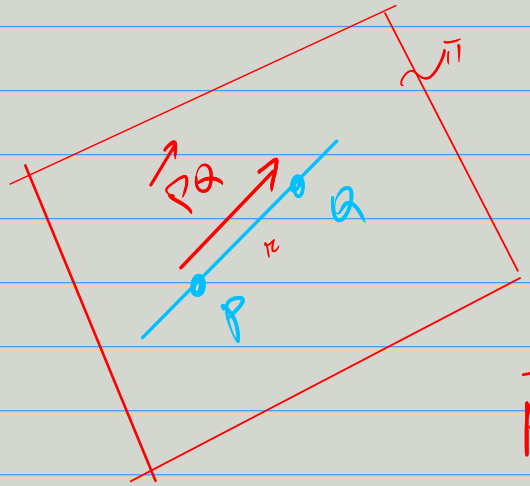
Se $\exists\, Q \in r \cap \pi$ con $Q \neq P \Rightarrow \vec{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1)$

e in particolare $\vec{PQ}$ genera $\mathcal{L}(\bar{v}_1)$

ma $Q \in \pi \Rightarrow \vec{PQ} \in W_2 \Rightarrow \mathcal{L}(\vec{PQ}) \subseteq W_2$

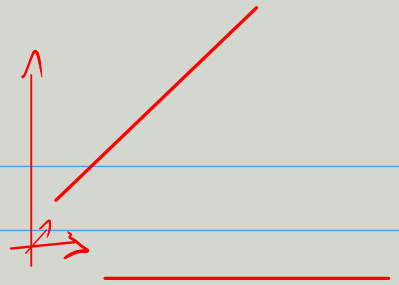
$\Rightarrow S = P + a\vec{PQ} \in \pi_2 \quad \forall a$

$\Rightarrow r \subseteq \pi_2$



$\vec{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{v}_1) \cap W_n$

Def: In $A_n(\mathbb{K})$ due rette con intersezione vuota e non parallele (⇒ non complanari) sono dette sghembe.



proposizione: Se $n \geq 3 \Rightarrow \exists$ rette sghembe in $A_n(\mathbb{K})$

Dim. Lo spazio V usato per definire $A_n(\mathbb{K})$ contiene almeno 3 vettori lin. indip. $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

prendiamo allora un punto P e poniamo $Q = P + \bar{e}_1$ e consideriamo le rette

$$r = [P, L(\bar{e}_2)]$$

$$s = [Q, L(\bar{e}_3)]$$

$\Rightarrow r$ ed s non sono parallele. perché

$\bar{e}_2$ ed $\bar{e}_3$ sono indip

Tuttavia non $\exists$ un piano che le contenga entrambe, perché se tale piano esistesse la sua giacitura dovrebbe contenere

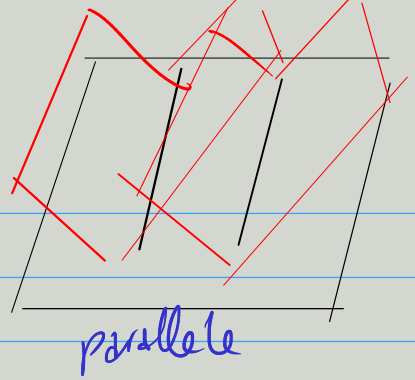
$$\bar{e}_1 = \vec{PQ}, \ \bar{e}_2 \text{ ed } \bar{e}_3$$

ma allora avrebbe $\dim = 3$ $\lightning$

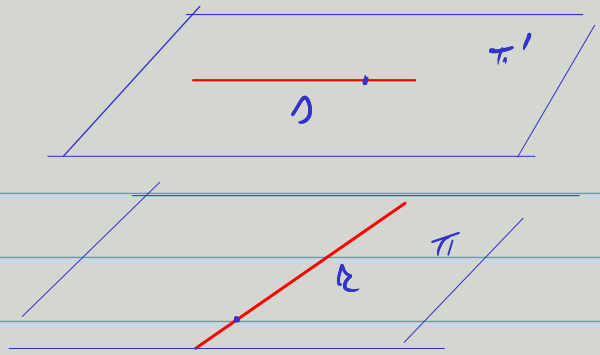
$\Rightarrow$ ne segue che a particolare r ed s sono anche disgiunte perché 2 rette incidenti sono sempre contenute in un piano $\square$

Prop.

Siano r_0 ed s due rette sghembe $\Rightarrow$ esistono esattamente 2 piani π e π' paralleli tali che $r_0 \subseteq \pi$, $s \subseteq \pi'$.



parallele



sghembe

DIM

Siano $r = [P_1, \mathcal{L}(\bar{v}_1)]$ e $s = [Q, \mathcal{L}(\bar{v}_2)]$

due rette sghembe

$\Rightarrow r \subseteq \pi = [P_1, \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)]$

$s \subseteq \pi' = [Q, \mathcal{L}(\bar{v}_2, \bar{v}_2)]$ e $\pi \parallel \pi'$

Sia π'' un piano che contiene r e che sia parallelo ad un piano che contiene $s \Rightarrow$

$\pi'' = [P_1, V_2]$ ma $\mathcal{L}(\bar{v}_2) \subseteq V_2$

$\mathcal{L}(\bar{v}_2) \subseteq V_2$ perché

il piano è parallelo ad un piano che contiene la dir. di s

$\Rightarrow V_2 = L(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \Rightarrow \pi'' = \pi$ □

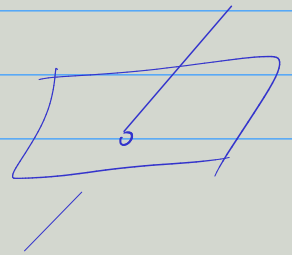
$A_n(1|k) = [A, V_n(1|k), t]$

Mutua posizione di 2 rette r, s

- complanari
  - parallele
    - disgiunte
    - coincidenti
  - incidenti in P
- sghembe

di una retta e un piano in $n=3$

- parallela
  - contenuta
  - disgiunta
- incidente in un punto



Def: In $A_n(\mathbb{K}) = [A, V_n(\mathbb{K}), \phi]$ si dice **riferimento affine** $\Gamma = [O, \mathcal{B}]$ una coppia ove O è un punto fissato di $A_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}$ è una base fissata di $V_n(\mathbb{K})$.
O è detto ORIGINE del riferimento.

In $A_n(\mathbb{K})$ sia $\Gamma = [O, \mathcal{B}]$ un riferimento affine fissato e sia $P \in A$ un punto.
Si dicono **COORDINATE** di P rispetto a Γ le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto la base $\mathcal{B}$

Si dice COORDINATIZZAZIONE LA FUNZIONE

$$\varphi_{\mathcal{R}} : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ed associa ad ogni punto le sue coordinate rispetto $\mathcal{R}$.

Teorema: $\varphi_{\mathcal{R}}$ è biiettiva.

DIM

i) Supponiamo $\varphi_{\mathcal{R}}(P) = \varphi_{\mathcal{R}}(Q) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow P = Q$

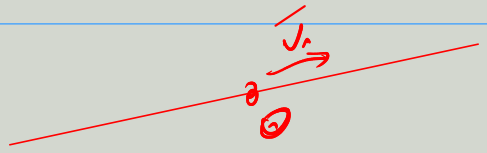
ii) Viceversa sia $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\Rightarrow$ per gli assiomi di spazio affine $\exists Q \in A$ tale che $Q = O + (x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n)$ e

$\varphi_{\mathcal{R}}(Q) = (x_1 \dots x_n)$ □

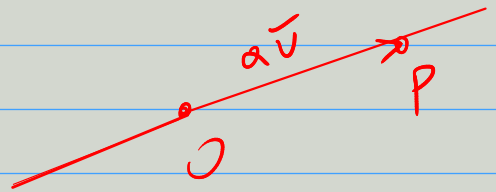
ESEMPI

$n = 1$



$[A, \mathcal{L}(\bar{v}), \mathcal{R}]$

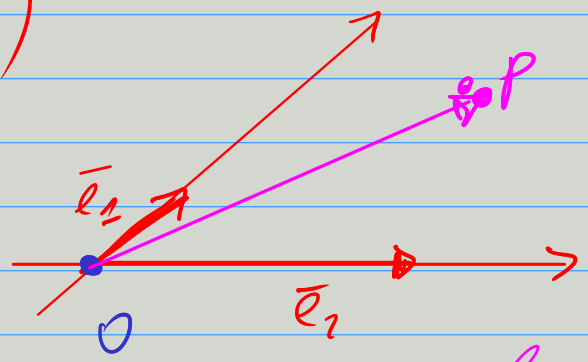
$\Gamma = (O; \mathcal{B} = (\bar{v}))$ $\qquad A \longrightarrow \mathbb{K}$



$\varphi_\Gamma(P) = \alpha$

$n = 2$

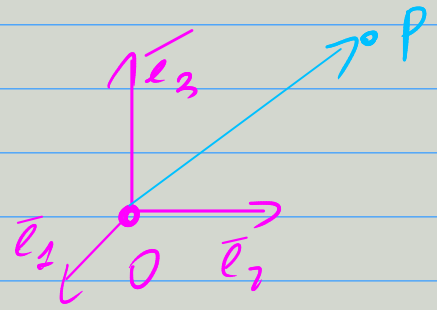
$\Pi = (O, \mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2))$



$\overrightarrow{OP} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$

è coordinabile dico coppia (α, β)

$n = 3$



$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$

$\downarrow$

$\varphi(P) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Coordinatizzazione → utile per mettere etichette ai punti.

$$A \tilde{=} \mathbb{K}^n$$

↓

si comporta "bene" rispetto la funzione f

Teorema: Sia $A_n(\mathbb{K}) = [A, V_n(\mathbb{K}), f]$ uno spazio affine e $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n))$ un riferimento affine di $A_n(\mathbb{K})$

Supponiamo $P, Q \in A$ di coordinate

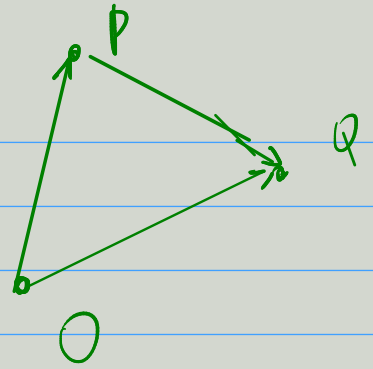
$$P \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$Q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$\Rightarrow$ Il vettore $\overrightarrow{PQ} \in V_n(\mathbb{K})$ ha componenti rispetto $\mathcal{B}$

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n) = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$$

Dim



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} =$$

$$= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

passando alle componenti rispetto $\mathcal{B}$ — □

Conseguenza: Sia $P \in \mathcal{A}$ un punto e $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ un vettore.

Supponiamo $P \equiv (p_1, \dots, p_n)$ coordinate

$\bar{v} \equiv (v_1, \dots, v_n)$ componenti

$\Rightarrow$ il punto $Q = P + \bar{v}$ avrà coordinate

$$(p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n).$$

DIM: facciamo vedere che $\overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

$\overrightarrow{PQ}$ ha componenti $(p_1 + v_1 \text{ — } p_n + v_n) -$

$(p_1 \text{ — } p_n) =$

$(v_1 \text{ — } v_n)$ □

e quindi è $\bar{v}$.

"Le traslazioni si rappresentano come somme di vettori in $\mathbb{K}$"

Teorema: Sia $A_n(\mathbb{K})$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$, e sia $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_n))$ un riferimento affine fissato.

Allora $\forall$ sistema lineare compatibile $AX = B$ di m equazioni in n incognite

l'insieme delle soluzioni

$$S = \{ {}^t(x_1 \dots x_n) \mid AX = B \}.$$

Corrisponde all'insieme delle coordinate di un sottospazio lineare (affine) di $A_n(\mathbb{K})$.

Viceversa, per ogni sottospazio lineare di $A_n(\mathbb{K})$, $S \exists$ un sistema lineare compatibile del tipo $AX = B$ con A matrice con n colonne tale che i punti di S hanno come coordinate esattamente le sol. di $AX = B$ $\square$

CORRISPONDENZA FRA	INSIEMI SOLUZIONI SISTEMI LINEARI IN n INCOGNITE	$\leftrightarrow$	SOTTOSPAZI AFFINI DI $A_n(\mathbb{K})$.

DIM: Sia $AX = B$ sistema lineare compatibile

$\Rightarrow S = \{ X_0 + Z \mid AZ = 0 \}$ e X_0 soluzione particolare

Sia P il punto di coordinate X_0

e sia $\tilde{W}$ lo spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{K}^n$) descritto da $AZ = 0$, $W \subseteq V_n(\mathbb{K})$ generato dalle preimm. dei vettori di $\tilde{W}$

$$\tilde{W} = \left\{ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n \mid (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \tilde{W} \right\}$$

$\Rightarrow \Pi = [P, W]$

OSSERVIAMO che 1) Il punto di coord. $(x_1 __ x_n) = X_0$
Appartiene a Π.

2) Ogni punto di Π si ottiene
traslando P con un vettore $\bar{w} \in W$
ma tale vettore ha componenti in $\tilde{W}$
$\Rightarrow$ le coordinate di ogni punto di Π
si scrivono come $X_0 + Z$ con $Z \in \tilde{W}$
Ne segue che gli elementi di Π hanno tutte
e sole coordinate in S.

SISTEMA LINEARE COMPATIBILE $\longrightarrow$ SOTTOSPAZIO AFFINE

SOTTOSPAZIO AFFINE $\xrightarrow{\Gamma}$ SISTEMA LINEARE

$$\Pi = [P; W] =$$

$$= \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \}$$

passiamo in coordinate ↓

$$\widetilde{\Pi} = \{ (x_1 \dots x_n) + (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) \mid (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) \in \widetilde{W} \}$$

In particolare $(y_1 \dots y_n) \in \widetilde{\Pi} \iff$

$$(y_1 \dots y_n) = (x_1 \dots x_n) + (w_1 \dots w_n)$$

per qualche $(w_1 \dots w_n) \in \widetilde{W}$

$$(y_1 \dots y_n) - (x_1 \dots x_n) \in \widetilde{W}$$

CHIEDIAMO CHE il VETTORE $(y_1 \dots y_n) - (x_1 \dots x_n)$
APPARTENGA AD UNO S.VETTORIALE

Sia $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ una base di $\tilde{W}$

vi chiediamo che $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ y_1 - x_1 & \dots & y_n - x_n \end{pmatrix} = m$

MA QUESTO CORRISPONDE A CHIEDERE CHE GLI
$n-m$ MINORI

QUADRATI MASSIMI DELLA MATRICE A HANNO DET $\neq 0$

$\Rightarrow$ costruire un sistema lineare di $n-m$ eq. in n incognite

$\square$

ESEMPIO

$A_2(\mathbb{R})$

$$r_0 := [(0,1); \mathcal{L}((2,3))]$$

$$P \in r_0 \iff \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x_1 - 0 & x_2 - 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\iff 3x_1 - 2(x_2 - 1) = 0$$

In $A_3(\mathbb{R})$

$$r_0 = [(1\,0\,1); \mathcal{L}((2\,1\,0))]$$

$$\text{rk}\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & 0 \\ x_1-1 & x_2 & x_3-1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x_1-1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ x_1-1 & x_3-1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - x_1 + 1 = 0 \\ 2(x_3-1) = 0 \end{cases}$$

In $A_3(\mathbb{K})$ $\quad \pi = [\,(1\,1\,1),\ \mathcal{L}((1\,0\,1),(0\,1\,0))\,]$

$$\text{rk}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1-1 & x_3-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_3 - 1 = x_1 - 1$$

equazione del piano.