Geometria (affine ed ampliata/complessificata)

→ Applicazione della teoria degli spazi vettoriali

↓

interpretazione degli insiemi di soluzioni dei sistemi lineari

N.B Sappiamo $AX = 0$

$\ker A \leq \mathbb{K}^n$

le soluzioni di $AX = B$ sono del tipo $X_0 + \ker A \neq 0$

↓

sottospazio affine.

Def: Spazio Affine → la geometria "Euclidea" in cui viene a mancare la nozione di distanza

↓

GEOMETRIA ASSOLUTA

Def: Si dice spazio affine di dimensione n su di un campo $\mathbb{K}$

$A_n(\mathbb{K}) = AG(n, \mathbb{K})$ una struttura algebrica $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$

con $f: A \times A \to V_n(\mathbb{K})$ tale che

1) A è un insieme (= insieme dei punti)

2) $V_n(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale di dim $= n$ su $\mathbb{K}$

3) $f: A \times A \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ gode delle seguenti 2 proprietà.

(P1): $\forall p \in A \; \forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \; \exists! \; q \in A : f(p,q) = \bar{v}$

(P2) $\forall p, q, r \in A : f(p,q) + f(q,r) = f(p,r)$

Il punto q di cui alla proprietà (P1) è detto

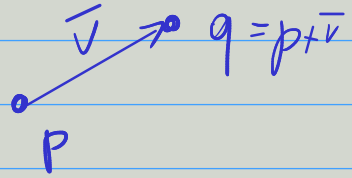
traslato di p mediante $\bar{v}$ e lo scriveremo

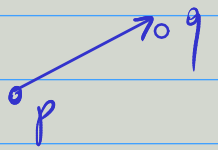
(con abuso di notazione) $q = p + \bar{v}$

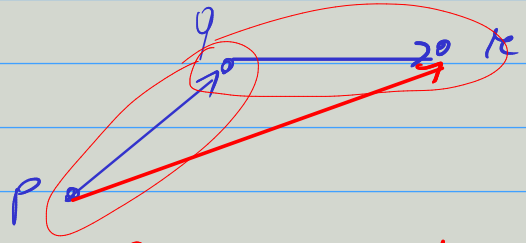
(q, p: punti; $\bar{v}$: vettore.)

In particolare la funzione $\tau_{\bar{v}} \begin{cases} A \to A \\ p \to p+\bar{v} \end{cases}$

è detta traslazione di vettore $\bar{v}$.

1) 

2) 



$f(p,q) + f(q,r) = f(p,r)$

Per semplificare la notazione $\forall p,q \in A$: $\overrightarrow{pq} := f(p,q) \in V_n(\mathbb{K})$.

Def $S \subseteq A$ è detto sottospazio affine di $A_n(\mathbb{K})$ se $\exists\, W \leq V_n(\mathbb{K})$ tale che $(S, W, f^W_{|S\times S})$ è uno spazio affine. Si dice dimensione di S la dim. di W

Se $\dim S = 0 \rightarrow$ l'insieme S consta di un solo punto

perché $W = \{\underline{0}\} \Rightarrow S$

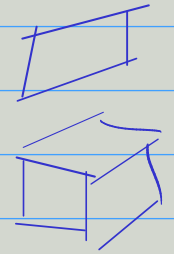
si identifica con un punto.

Se $\dim S = 1 \rightarrow S$ è una retta

$\dim S = 2 \rightarrow S$ è un piano

$\dim S = 3 \rightarrow S$ è un solido

$\dim S = n-1 \rightarrow S$ è un iperpiano



OSS sulla funzione f.

In $A_n(\mathbb{K})$, $P, Q, R \in A$

1) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ infatti $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ per (P2)

$\Rightarrow$ sottraendo $\overrightarrow{PP}$ a dx e sx si ottiene $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

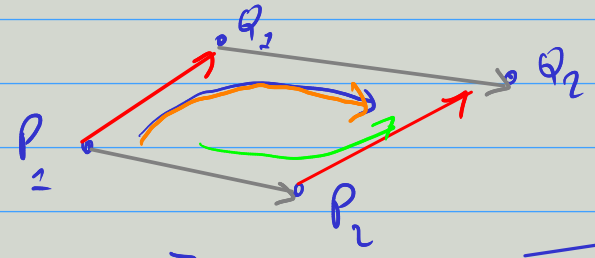
2) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow Q = R$ è la (P1) perché

$Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{PR} = R$

3) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Rightarrow Q = P$ (segue da 2 perché $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP}$)

4) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ infatti $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$

5)



$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \iff \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$

$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{P_1Q_2} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2}$

e sottraendo si ottiene la tesi

Oss 2: In $A_n(\mathbb{K})$ fissato $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ la traslazione $\tau_v : A \to A$ è una biezione

Dim: Dimostriamo tutto $\forall q \in A_n$ consideriamo $p = q + (-\bar{v})$

$\Rightarrow \tau_v(p) = p + \bar{v} = q + (-\bar{v}) + \bar{v} = q \Rightarrow$ suriettiva

Viceversa Se $\tau_v(p) = \tau_v(p') = q$

$\Rightarrow \quad p + \bar{v} = p' + v$

$f(p,q) = f(p',q) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(q,p) = f(q,p') \Rightarrow \vec{qp} = \vec{qp'} \Rightarrow p = p'$

$\Rightarrow \tau_v$ è iniettiva $\square$

MOSTRIAMO COME COSTRUIRE I SOTTOSPAZI AFFINI

→ Nozione di spazio lineare.

$A_n(\mathbb{K})$ siano $P \in A$ un punto e $W_n \leq V_n(\mathbb{K})$

con $\dim W_n = h \leq n$

Si dice <u>sottospazio lineare</u> $S_n = [P; W_n]$

il sottoinsieme $S_n \subseteq A_n(\mathbb{K})$ formato da tutti

i traslati di P mediante vettori di W_n

$$S_h = [P, W_h] = \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W_h \}$$

P è detta origine di S_h e W_h è detta spazio di traslazione di W_h

1) Se $h = 0 \Rightarrow W_h = \{\underline{0}\} \Rightarrow S_h = \{P\}$

Se $h = 1 \Rightarrow W_1 = \mathcal{L}(\bar{v}) \Rightarrow S_1 = \{ P + a\bar{w} \mid a \in \mathbb{K} \}$

$\{ a\bar{w} \mid a \in \mathbb{K} \}$.

Siano $P, Q \in S_1 \Rightarrow Q = P + a\bar{w}$ con $a\bar{w} \in W_1$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = a\bar{w} \in W_1$

$\Rightarrow (S_1, W_1, f^{W_1}_{S_1 \times S_1})$ valgono le prop di spazio affine.

$h = 1 \Rightarrow S_1$ è un sottospazio affine di dim $1 \Rightarrow$ retta.

Teorema: Sia $S_h = [P; W_h]$ un sottospazio lineare di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow S_h$ è un sottospazio affine di $A_n(\mathbb{K})$.

Viceversa: Se $\mathcal{U}_h \neq \phi$ è un sottospazio affine di $A_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists\, P \in A$, $W_h \subseteq V_n(\mathbb{K})$ tali che $\mathcal{U}_h = [P; W_h]$

SOTTOSPAZI AFFINI $\neq \emptyset$ $\equiv$ SOTTOSPAZI LINEARI

DIM: $S_h = [P; W_h] \Rightarrow \forall\, Q \in S_h$ abbiamo $\overrightarrow{PQ} \in W_h$

In particolare in $\left(S_h, W_h, f^{W_h}_{S_h \times S_h}\right)$

la funzione $f^{W_n}_{S_n \times S_n} : S_n \times S_n \to W_n$

ha il dominio e codominio corretti

Inoltre $\forall \bar{\omega} \in W_n : \forall Q, R \in S_n$ abbiamo

, $\vec{PQ} \in W_n$ per costruzione

$\vec{QP} \in W_n$ perché $\vec{QP} = -\vec{PQ}$

$R = Q + \bar{\omega} \in S_n$ in quanto

$\Updownarrow$ se $\vec{PR} = \vec{PQ} + \bar{\omega}$

con $\vec{PX} \in W_n$, $\bar{\omega} \in W_n$

e dunque $\vec{PR} \in W_n$

ed R è un traslato di P mediante

un vettore di W_n

OGNI TRASLATO DI Q mediante vettori di W_n

è anche una traslaz. di P e dunque $\in S_h$.

$\Rightarrow$ S_h è sottospazio affine

Viceversa: Sia $(\mathcal{C}, W_h, f|^{W_h}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}})$ un sottospazio affine di $A_n(\mathbb{K})$ con $\mathcal{C} \neq \emptyset$

$S_h = [P; W_h]$ è un sottospazio lineare con $P \in W_h$ e $S_h = \mathcal{C}$.

Inoltre tutto che S_h sia un sottospazio lineare è immediato per costruzione.

Sia $Q \in \mathcal{C} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W_h \Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow Q \in S_h \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq S_h$

Viceversa sia $Q \in S_h \Rightarrow \exists \bar{w} : Q = P + \bar{w}$ e $\bar{w} \in W_h$

$\Rightarrow f(P,Q) \in W_n$ e quindi $Q \in \mathcal{C}$ in quanto

$\forall$ vettore di W_n il traslato di un punto di $\mathcal{C}$

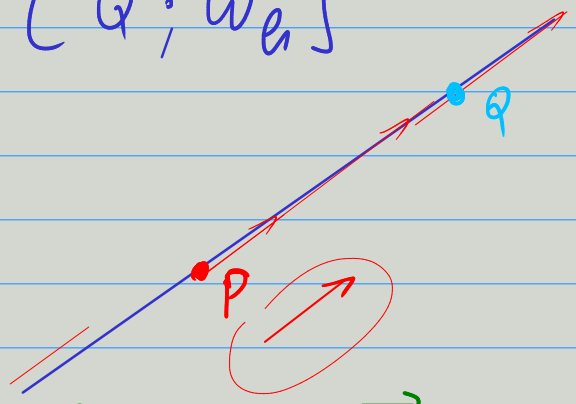
mediante esso deve appartenere allo spazio affine

$(\mathcal{C}, W_n, f|^{W}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}})$. □

OSS: Sia $S_n = [P; W_n]$ un sottospazio di $A_n(\mathbb{K})$

e $Q \in S_n \Rightarrow$

$$S_n = [Q; W_n]$$



DIM Sia $X \in S_n\,[P, W_n] \Rightarrow \vec{PX} \in W_n$

ma anche $\vec{PQ} \in W_n$

$\Rightarrow \vec{QP} \in W_a \Rightarrow \vec{QP} + \vec{PX} = \vec{QX} \in W_a$

$\Rightarrow X = Q + \vec{QX}$

e $X \in [Q; W_a]$

$\Rightarrow [P; W_a] \subseteq [Q, W_a]$

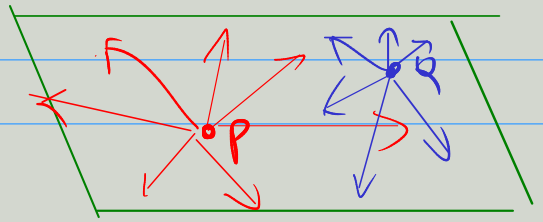
Vice versa $Y \in [Q; W_a] \Rightarrow \vec{QY} \in W_a$

$\Rightarrow \vec{PQ} + \vec{QY} \in W_a$

$\Rightarrow Y = P + \vec{PY} \in [P; W_a]$

$\Rightarrow [Q, W_a] \subseteq [P; W_a]$

e dunque i due insiemi coincidono $\square$



Def: Due sottospazi $S_n = [P, W_n]$ e $S'_k = [Q, W'_k]$ sono detti **paralleli** se $W_n \subseteq W'_k$ oppure $W'_k \subseteq W_n$

In particolare se le dimensioni di W_n e W'_k coincidono si ha $S_n \parallel S'_k \iff W_n = W'_k$

Def: Si dice **direzione** di una retta il suo spazio di trasl. (di dimensione 1)

giacitura di un piano il suo spazio di trasl. (di dimensione 2)

Due rette sono **parallele** fra loro $\iff$ esse hanno la stessa direzione

Nel piano ordinario due rette parallele sono 2 rette con intersezione vuota.

Proposizione: Siano $S_n = [P, V_n]$ e $S'_k = [P', V'_k]$ due sottospazi lineari.

$\Rightarrow$ 1) $S_n \subseteq S'_k \iff S_n \cap S'_k \neq \phi$, $V_n \leq V'_k$

2) Se $S_n \cap S'_k \neq \phi \Rightarrow S_n \cap S'_k = [Q, V_n \cap V'_k]$ ove Q è un qualsiasi punto di $S_n \cap S'_k$.

Dim Se $S_n \subseteq S'_k \Rightarrow S_n \cap S'_k \neq \phi$ e posto $P \in S_n \cap S'_k$ si ha $[P; V_n] = S_n$

$[P; V'_k] = S'_k$

osserviamo che $\forall Q \in S_n \Rightarrow Q \in S'_k$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V_n \Rightarrow PQ \in V'_k$

$\Rightarrow V_n \subseteq V'_k$

viceversa $V_n \subseteq V'_k \qquad S_n \cap S'_k \neq \phi$

$\Rightarrow S_n = [P, V_n] \qquad S'_k = [P, V'_k]$

con $P \in S_n \cap S'_k$

$\Rightarrow \forall\ Q \in S_n$ si ha $\overrightarrow{PQ} \in V_n \subseteq V'_k$

$\Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ} \in S'_k \Rightarrow Q \in [P, V'_k] =$

$= S'_k$

2) Supponiamo $S_n \cap S'_k \neq \phi$ e sia $P \in S_n \cap S'_k$

consideriamo $[P; V_n \cap V'_k] = S''$

osserviamo che $\forall Q \in S''$

$$Q = P + \bar{v} \quad \text{con } \bar{v} \in V_h \cap V'_k$$

$$\Rightarrow \bar{v} \in V_h \Rightarrow Q \in S_h$$

$$\bar{v} \in V'_k \Rightarrow Q \in S'_k$$

$$\Rightarrow Q \in S_h \cap S'_k \qquad [P; V_h \cap V'_k] \subseteq S_h \cap S'_k$$

viceversa se $Q \in S_h \cap S'_k \Rightarrow$

$$\vec{PQ} \in V_h, \ \vec{PQ} \in V'_k \Rightarrow$$

$$\vec{PQ} \in V_h \cap V'_k \Rightarrow Q \in S''$$

□

Teorema: Siano S_h e S'_h due sottospazi paralleli della medesima dimensione h

Allora o $S_h \cap S'_h = \phi$ oppure $S_h = S'_h$

Dim: Sia $P \in S_n \cap S'_n$ con $S_n = [Q, V_n]$

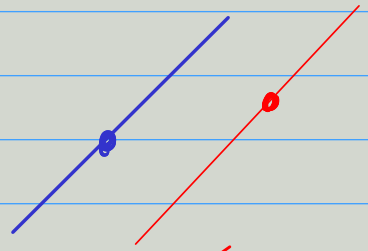
$S'_n = [Q', V_n]$

$\Rightarrow$ per la prop. precedente

$S_n = [P; V_n]$ $P \in S_n$

$S'_n = [P; V_n]$ $P \in S'_n$

$\Rightarrow S_n \cap S'_n = [P, V_n \cap V_n] = [P, V_n] = S_n = S'_n$ □



Teorema: 1) per 2 punti distinti di $A_n(\mathbb{K})$ passa una e una sola retta.

Dim $P, Q \in A_n(\mathbb{K})$

$S_1 = [P, V_1]$ ma $V_1 \ni \vec{PQ}$ perché $Q \in S_1$

$\vec{PQ} \neq \underline{0}$ perché $Q \neq P \Rightarrow V_{\underline{1}} = \mathcal{L}(\vec{PQ})$

perché $\dim V_{\underline{1}} = 1$ □

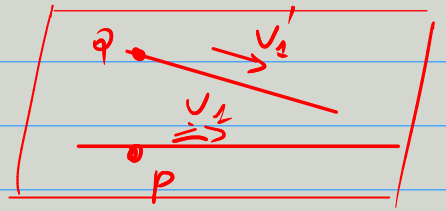
1) In $A_2(\mathbb{K})$ due rette distinte sono parallele.

Siano $r_{\underline{1}} = [P, V_{\underline{1}}]$

$r_1 = [Q, V'_{\underline{1}}]$ due rette distinte

Se $V_{\underline{1}} = V'_{\underline{1}} \Rightarrow$ ok $r_{\underline{1}} \parallel r_1$

altrimenti supponiamo per assurdo $V_{\underline{1}} \neq V'_{\underline{1}}$



A_2

OSSERVIAMO CHE A_2 ha $\dim 2$, $\dim(V_{\underline{1}} \oplus V'_{\underline{1}}) = ?$

e quindi ogni punto di A_2 si può

scrivere come traslato di P mediante un vettore di $V_1 \oplus V_1' = \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_1')$.

$$\Rightarrow \quad Q = P + \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 \qquad \text{per opportuni } \alpha, \beta$$

$$\Rightarrow \quad Q - \beta \bar{v}_2 = P + \alpha \bar{v}_1$$

$$\in r_2 \qquad\qquad \in r_1$$

$$Q - \beta \bar{v}_2 = P + \alpha \bar{v}_1 \in r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$$

ASSURDO $\square$

In $A_2(\mathbb{K})$ due rette sono parallele $\Leftrightarrow$ coincidono o sono disgiunte

$\Updownarrow$

hanno la stessa direzione.