Applicazioni lineari

V, W sp. vettoriali sul medesimo $\mathbb{K}$

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \{ f: V \to W \mid f \text{ lineare} \}.$$

- $\mathrm{Hom}(V,W)$ è uno spazio vettoriale
- $\forall f: V \to W$ lineare $\quad \mathrm{Im} f = \{ \bar{w} \in W \mid \exists \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{w} \} \leq W$

$$\mathrm{Ker} f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0}_W \}. \leq V$$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Ker} f}_{\text{nullità}} + \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{\text{rango}} = \dim V$$

- Una applicazione lineare manda insiemi di generatori di V in insiemi di generatori di $\mathrm{Im}(f)$

In generale manda sequenze libere in sequenze libere se $\mathrm{Ker} f = \{\underline{0}\}$ (e dunque f è iniettiva)

- fissare due basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ con $\dim V = n$ $\dim W = m$

  $\Rightarrow$ una applicazione lineare $f: V \to W$ si può rappresentare mediante una matrice $\mathbb{K}^{m,n}$.

  A = matrice che rappresenta f rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

  X = vettore componenti di $\bar{v} \in V$ rispetto $\mathcal{B}_V$

  Y = vettore componenti di $\bar{w} = f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}_W$

$$\boxed{Y = AX}$$

- Conseguenze. $\rightarrow$ $Hom(V, W) \cong \mathbb{K}^{m,n}$ $\Rightarrow$ $\dim Hom(V,W) = m \cdot n$

  * $\rightarrow$ Risolvere un sistema lineare $AX = B$ è equivalente a cercare (se esistono) le preimmagini di B secondo l'applicazione lineare

$$f_A \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

→ Il prodotto di matrici è associativo.

→ Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice e $B \in GL(n, \mathbb{K})$ una matrice invertibile $\Rightarrow rk(AB) = rk(A)$.

Def: Una applicazione lineare $f: V \to W$ è detta isomorfismo se ammette inversa lineare, $\Rightarrow f$ è iniettiva e suriettiva.

f isomorfismo $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$ & $\operatorname{Im} f = W$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim W = \dim V$ per il teorema nullità + rango.

$f_B: V \to \mathbb{K}^n$ dato dalle applicazione che assegnata

$\mathcal{B}$ base di V e $\bar{v} \in V$ associa a $\bar{v}$ il vettore delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

$$f_{\mathcal{B}}^{-1} \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow V \\ (x_1 \ldots x_n) \longrightarrow x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n \end{cases}$$

perché il prodotto di matrici é associativo?

$\Rightarrow$ perché esso rappresenta la composizione di applicazioni lineari e la composizione di funzioni é sempre associativa.

Siano

$$f : V \to W \qquad g : W \to U$$

lineari. $\Rightarrow$ $g \circ f : V \to U$

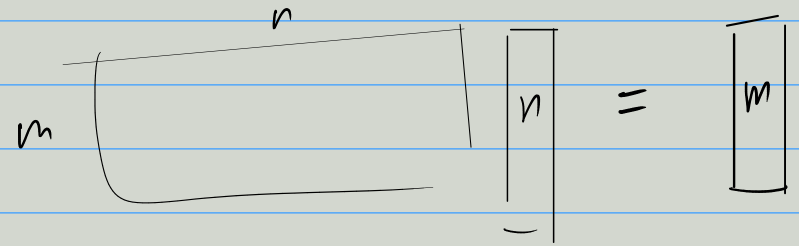
e si dimostra che $(g \circ f)$ é lineare

fissiamo 3 basi $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$, $\mathcal{B}_U$

e supponiamo $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = k$.

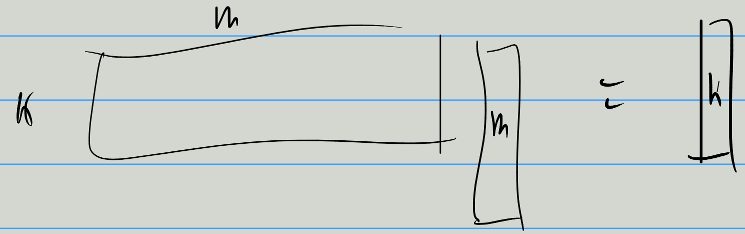
Allora f é rappresentata rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

da una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$



g é rappresentata rispetto $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U$ da una matrice

$B \in \mathbb{K}^{k,m}$



BA é una matrice $\in \mathbb{K}^{k,n}$ (per def

di prodotto di matrici)

$\Rightarrow$ rappresenta una applicazione lineare $V \to U$

rispetto le basi fissate. ed in particolare rappresenta $(g \circ f)$

$$B\left[A\begin{pmatrix}1\\0\\|\\0\end{pmatrix}\right] = BX_1'$$

ove $X_1' =$ rapp. del vettore $f\left[\begin{pmatrix}1\\|\\0\end{pmatrix}\right]$ rispetto $\mathcal{B}_W$

$BX_1' = X_1''$ rappresentazione di $g\left(f\begin{pmatrix}1\\|\\0\end{pmatrix}\right)$ rispetto la base $\mathcal{B}_U$

$\Rightarrow$ vale per tutti i vettori di $\mathcal{B}_V$ e quindi in particolare BA rappresenta proprio la funzione $(g \circ f)$.

PRODOTTO DI MATRICI $\longleftrightarrow$ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

ASSOCIATIVO — ASSOCIATIVA

$$A \in \mathbb{K}^{m,n}, \quad B \in \mathbb{K}^{k,m}$$

$$\Rightarrow \quad BA \in \mathbb{K}^{k,n}$$

$$f: V \to W \qquad g: W \to U$$

<u>COROLLARIO</u>: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in GL(n, \mathbb{K})$

$$\Rightarrow \quad rk(AB) = rk(A)$$

<u>DIM</u> l'applicazione lineare indotta da B é

un isomorfismo (in particolare $\ker f_B = 0$)

di $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. $\Rightarrow$ manda sequenze libere

in sequenze libere $\Rightarrow$ la dim dello spazio

delle colonne di AB coincide con la

dim. dello spazio delle colonne di A. $\square$

Se $C \in GL(m, \mathbb{K}) \Rightarrow rk(CA) = rk(A)$

MOLTIPLICARE A dx o sx una matrice A per una matrice invertibile (di dimensioni opportune ma quadrata) non cambia il rango!

<u>CONSEGUENZA</u>: quando si diagonalizza il rango della mat. diagonale coincide col rango della mat. di partenza

RIVISITIAMO LA DIAGONALIZZAZIONE.

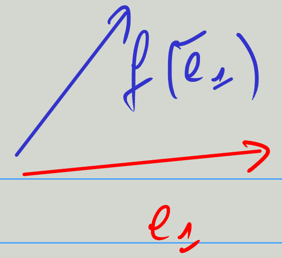
$$\boxed{AX = \lambda X} \qquad A \in \mathbb{K}^{n,n}$$

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $f : V \to V$
un endomorfismo (= appl. lineare $V \to V$)
e sia $\mathcal{B}$ una base di $V_n(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow f$ è rappresentata da una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

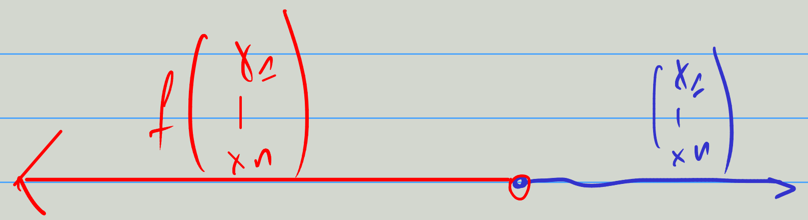
DOMANDA (vera) esiste una base rispetto cui f si rappresenta particolarmente bene?

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \_\_\_\_ + a_{n1}\bar{e}_n$$



osserviamo che se $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ é autovettore per A $\Rightarrow$

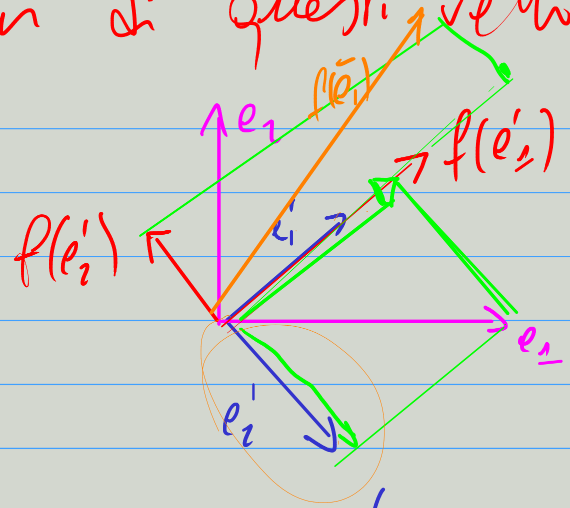
$\Rightarrow f\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ cioé il vettore viene mandato in un vettore ad esso proporzionale



f non cambia la direzione degli autovettori per A

$\rightarrow$ Se sappiamo costruire una base di autovettori per V

$\Rightarrow$ rispetto a questa base f si rappresenta come una matrice diagonale perché non cambia le direzioni di questi vettori



OSS: se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di $V_n(\mathbb{K})$,
A è la matrice che rappresenta una funzione lineare f rispetto a $\mathcal{B}$ e
A' è la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}'$ e P è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

P rappresenta i vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} \text{vettori } \bar v \text{ rispetto a } \mathcal{B} \arrow[d, "A"] & \text{vettori } \bar v' \text{ rispetto } \mathcal{B}' \arrow[l, "{}^tP"'] \arrow[d, "A'"] \\ \text{vettori } f(\bar v) \text{ rispetto } \mathcal{B} \arrow[r, "{}^tP^{-1}"] & \text{vettori } f(\bar v') \text{ rispetto } \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

$$A' = {}^tP^{-1} A \, {}^tP$$

$$\Rightarrow \boxed{{}^tP A' = A \, {}^tP}$$

componenti per colonne

Applicazione: minimi quadrati (prod. scalare + appl lineari + sistemi lineari).

$AX = B$ sistema lineare.

↓ problema fisico.

Esempio: Voi avete una serie di misurazioni e volete trovare una funzione polinomiale che vi descriva il loro andamento.

Sapete che le vostre misurazioni devono soddisfare una eq. del tipo

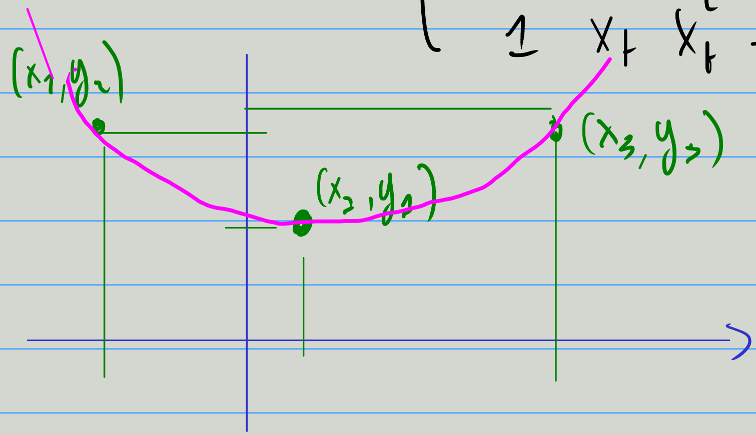
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

(x_i, y_i) $\quad i = 1 \dots t$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_t + \dots + a_n x_t^n = y_t \end{cases}$$

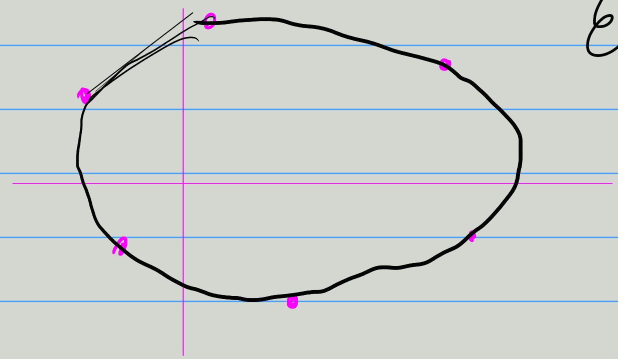
e cercare gli a_i

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_t & x_t^2 & \cdots & x_t^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}$$



tracciare una curva che passi per i punti.

si imposta e risolve un sistema lineare.



Esempio: orbita di un asteroide

↓

si sa che deve essere descritta da un eq. di II grado.

problema → il sistema deve ammettere soluzione ma i dati sperimentali possono contenere errori e può capitare di avere un sistema

$$AX = B$$

non compatibile.

Cosa fare se un sistema non è compatibile?

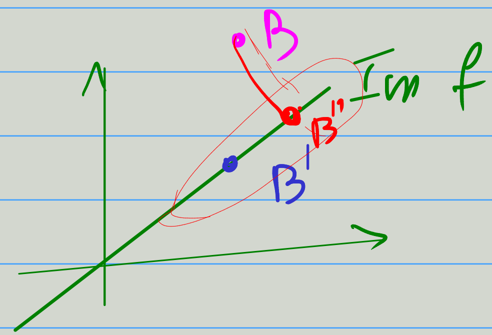
1) cambiare i dati → cercare misurazioni più precise

2) risolvere il sistema compatibile "più vicino" a quello dato.

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

IDEA: Sia AX la parte "a sx" del nostro sistema e sia $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare indotta da A rispetto le basi canoniche.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ e tutti i sistemi compatibili del tipo $AX = B'$ devono avere $B' \in \operatorname{Im} f$

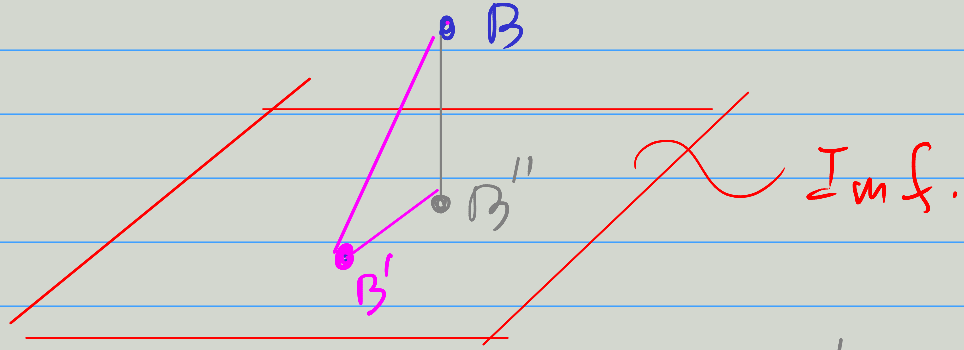


$B \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow$ sistema incompatibile

Che sistema possiamo considerare → cerchiamo $B'' \in \mathrm{Im} f$ tale che $\|BB''\|$ sia minima e risolviamo $AX = B''$

In questo modo "approssimiamo rispetto la distanza euclidea il sistema originario"

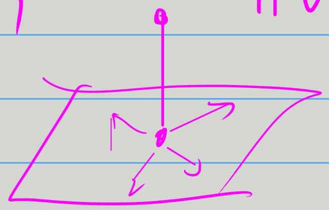
→ Approssimazione di minimi quadrati



B'' deve essere la proiezione ortogonale di B in $\mathrm{Im} f$

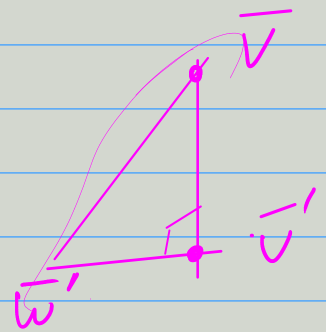
Def: Sia $W \leq V_n^0(\mathbb{R})$ un sottospazio vettoriale $\bar{v} \in V_n^0(\mathbb{R})$ si dice proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su W l'elemento $\bar{v}' \in W$ tale che $\forall \bar{w} \in W$, $(\bar{v}-\bar{v}') \cdot \bar{w} = 0$

Teorema $\forall \bar{w} \in W$, $\quad \|\bar{v}-\bar{w}\| \geq \|\bar{v}-\bar{v}'\|$



DIM Infatti: $\|\bar{v}-\bar{w}\|^2 = (\bar{v}-\bar{w}) \cdot (\bar{v}-\bar{w})$

poniamo $\bar{w} = \bar{v}' + \bar{w}'$ con $\bar{w}' \in W$



$$\|\bar{v}-\bar{v}'\|^2 \leq \|\bar{v}-\bar{w}'\|^2 + \|\bar{w}'-\bar{v}'\|$$

$$\|\bar{v}-\bar{w}'\|^2 = \|\bar{v}-\bar{v}'\|^2 + \|\bar{v}'-\bar{w}'\|$$

$$(\bar v - \bar w')\cdot(\bar v - \bar w') = (\bar v - \bar v' + \bar v' - \bar w')\cdot(\bar v - \bar v' + \bar v' - \bar w')$$

$$= (\bar v - \bar v')\cdot(\bar v - \bar v') + (\bar v' - \bar w')\cdot(\bar v' - \bar w') + \underbrace{2(\bar v - \bar v')\cdot(\bar v' - \bar w')}_{=0} =$$

$$(\bar v - \bar v')\cdot(\bar v - \bar v') + (\bar v' - \bar w')\cdot(\bar v' - \bar w')$$

$$\|\bar v - \bar w'\|^2 = \|\bar v - \bar v'\|^2 + \|\bar v' - \bar w'\|^2 \geq \|\bar v - \bar v'\|^2$$

$\Rightarrow$ La proiezione ortogonale di $\bar v$ su W è il vettore di W più vicino a $\bar v$.

$\square$

$$AX = B \quad \rightarrow \quad \boxed{AX = \pi_A(B)}$$

questo sistema si può anche riscrivere in termini di prodotto di matrici.

Il sistema lo si può vedere su questi termini

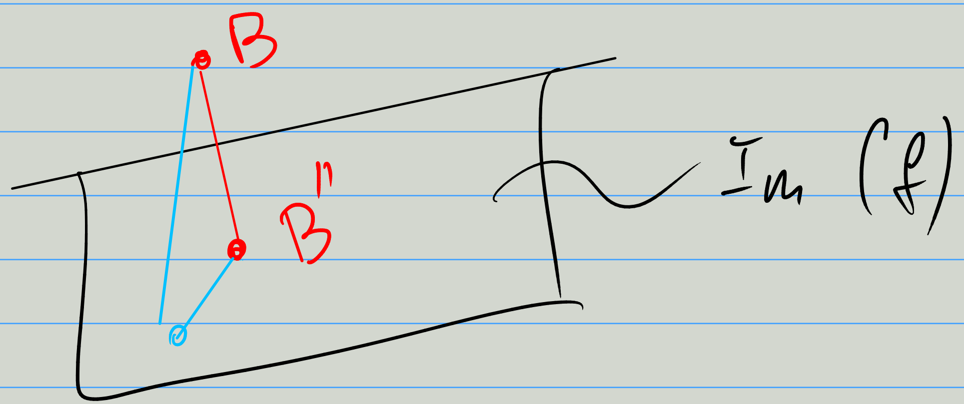
Vogliamo una soluzione tale che $(AX-B)$ sia ortogonale a tutti i vettori che generano $\mathrm{Im}\, f_A$. Ma i vettori che generano $\mathrm{Im}\, f$ sono proprio le colonne di A $\Rightarrow$ la nostra soluzione X tale che $(AX-B) \perp \mathcal{L}(C_A)$ deve soddisfare $\quad {}^tA\,\underbrace{(AX-B)}_{\bar{v}}=0$

$\Rightarrow$ dobbiamo risolvere $\boxed{{}^tA A X = {}^tA B}$ $\quad (*)$

ed (*) é il sistema che dà la risoluzione ai minimi quadrati. $\square$

$AX = B$ compat $\to$ fine

incompat $\to$



cerco X: $(AX - B) = (B'' - B) \perp \mathrm{Im}(f)$

$(B'' - B) \cdot C_i = 0 \quad \forall i$

$C_i =$ colonna di A

$\Rightarrow$ $$(B'' - B) \cdot C_i = 0 \quad \forall i$$

si scrive anche

$$^{t}A\,(B'' - B) = \underline{0}$$

adesso al posto di B'' scrivo AX

$$\underbrace{^{t}A\,(AX - B) = \underline{0}}$$

$$\boxed{^{t}A A X = {}^{t}A B}$$ $\rightarrow$ sistema compatibile che ci dà la soluzione cercata

$\perp$