Applicazioni Lineari (e reinterpretazione delle matrici e dei sistemi lineari).

Def: Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$. Una funzione

$$f: V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$$

é detta <u>lineare</u> se

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})$$

Le applicazioni lineari sono anche dette omomorfismi e si scrive <u>$Hom(V, W)$</u> per l'insieme di tutte le applicazioni lineari $V \to W$.

OSS: Hom(V, W) é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto le operazioni

$$(f+g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) + g(\bar{x})$$
$$(\alpha f)(\bar{x}) := \alpha \cdot f(\bar{x})$$

Domanda: qual é la dimensione di Hom(V, W)?

$\rightarrow$ Sarà funzione delle dimensioni di V e di W

$$\text{Hom}(\{\underline{0}\}, W) = \{\underline{0}\} \quad \text{ove} \quad \underline{0}(\underline{0}) = \underline{0}$$

OSS. Una applicazione lineare manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari delle loro immagini.

$\dim V = n$, $\dim W = m$ $\rightarrow$ $\boxed{n > 0, m > 0}$

esiste una base $\mathcal{B}(\bar{e}_1 - \bar{e}_n)$ di V e una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \_\_\_ e'_m)$ di W.

Se $n = 0 \Rightarrow Hom(\{\underline{0}\}, W) = \{\underline{0}\}$. Se $m = 0$ $Hom(V, \{\underline{0}\}) = \{\underline{0}\}$

$\dim Hom = 0$

$\forall \bar{v} \in V \quad f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \_\_\_ + \alpha_n \bar{e}_n) =$

$= \alpha_1 \boxed{f(\bar{e}_1)} + \_\_\_ + \alpha_n \boxed{f(\bar{e}_n)}$

supposto $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \_\_\_ + \alpha_n \bar{e}_n$

La funzione f é univocamente determinata dai valori che essa assume su di una base $\mathcal{B}$ di V.

D'altro canto $f(\bar{e}_i) \in W$ quindi $f(\bar{e}_i)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di B'

$$\forall i: \quad f(\bar{e}_i) = a_{1i}\bar{e}'_1 + a_{2i}\bar{e}'_2 + \ldots + a_{mi}\bar{e}'_m$$

In particolare $\forall i$ $f(\bar{e}_i)$ é caratterizzato da m valori

$$\bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n$$

$$f(\bar{v}) = \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \alpha_2 f(\bar{e}_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n) =$$

$$= \alpha_1 \sum_{j=1}^{m} a_{j1}\bar{e}'_j + \alpha_2 \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\bar{e}'_j + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\bar{e}'_j \qquad (*)$$

Se ragioniamo in componenti vediamo da (*) che

posto

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_m \end{pmatrix}$$ componenti di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$

$$= \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$ componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{---} & a_{1n} \\ | & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \text{---} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Y = AX \qquad = $$

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$

$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{---} + a_{2n}x_n$

etc. etc.

CONSEGUENZA: La matrice A definisce l'applicazione lineare f rispetto le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

In altre parole $\exists$ una corrispondenza lineare biettiva fra

$$\boxed{Hom(V, W) \cong \mathbb{K}^{m,n}}$$

Quindi $\dim Hom(V, W) = \dim \mathbb{K}^{m,n} = m \cdot n$.

Sia $f : V \to W$ lineare $\mathcal{B}$ base di V

$\mathcal{B}'$ base di W.

costruiamo una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

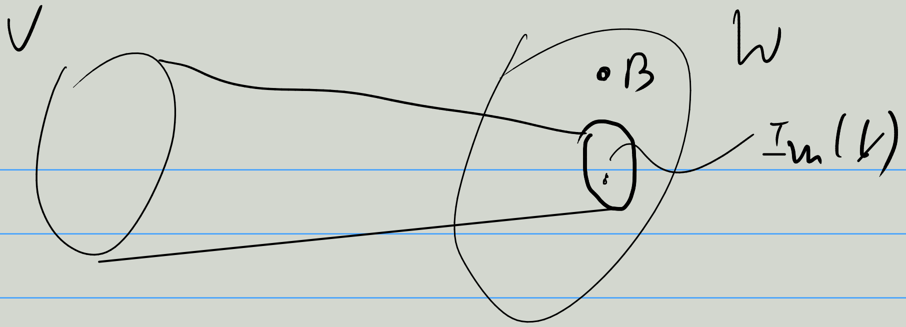
dove le colonne di A corrispondono alle componenti rispetto $\mathcal{B}'$ dei vettori della base $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $\forall \bar{v} \in V$, le componenti di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$ sono date da.

$$Y = AX$$ #

<u>N.B</u>: Sia $AX = B$ un sistema lineare

$\Rightarrow$ il sistema è compatibile $\Leftrightarrow$ B appartiene all'immagine dell'applicazione lineare definita dalla matrice A (rispetto delle basi arbitrarie)



Ma adesso mostreremo che Im f è uno sottospazio vett. di W generato dai vettori che sono c. lineari con i coeff delle colonne di A di B'

$$AX = B$$

compatibile $\iff B \in \operatorname{Im} f$

$\iff \dim \mathcal{L}(\operatorname{Im}(f), B) = \dim \mathcal{L}(\operatorname{Im}(f))$

$\iff \underset{\text{rk}(A|B)}{\overset{\shortparallel}{}} \;=\; \underset{\text{rk}(A)}{\overset{\shortparallel}{}}$

[Rouché - Capelli]

Teorema: $f: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ $Im f$ è un sottospazio vettoriale di W e se B è una base di V $\Rightarrow$ "$\{\bar{e}_1 - \bar{e}_n\}$"

$$(f(e_1) \text{ — } f(e_n))$$

è un sistema di generatori per $Im(f)$.

DIM:

Siano $\bar{x}, \bar{y} \in Im f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \, \bar{u}, \bar{v} \in V : f(\bar{u}) = \bar{x}, \; f(\bar{v}) = \bar{y}$

e dunque

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) =$$

$$= f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = f(\bar{w})$$

con $\bar{w} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in V$

$\Rightarrow Im\, f \leq W$

chiaramente se B' é una base di Imf

$\Rightarrow B' = (\bar{e}_1' \text{---} \bar{e}_k')$ e ognuno

dei vettori di B' ammette preimmagine.

Sia $(\bar{v}_1' \text{---} \bar{v}_k')$ la seq delle preimmagini

in V e osserviamo che $\bar{v}_1' \text{---} \bar{v}_k'$

sono tutti c lineare di una base B di V.

$\Rightarrow$ anche $\bar{e}_1' \text{---} \bar{e}_k'$ sono c. lineari delle

immagini dei vettori di una qualsiasi base di V $\Rightarrow$

le c. lineari delle immagini di una base di

V generano $Im(f)$ $\square$

$$V \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Im}(f) \subseteq W$$

$$(\bar{v}_1' \,\text{—}\, \bar{v}_k') \xleftarrow{\ f^{-1}\ } (\bar{e}_1' \,\text{—}\, \bar{e}_n')$$

$$(\bar{v}_1' \,\text{—}\, \bar{v}_k') \xrightarrow{\ f\ } (\bar{e}_1' \,\text{—}\, \bar{e}_n')$$

$\downarrow$

sono c. lineare di un sist. di generatori di V

comb. lineari

$$(\bar{g}_1 \,\text{—}\, \bar{g}_n) \longrightarrow (\bar{g}_1' \,\text{—}\, \bar{g}_n')$$

Esempio

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (2x, y - z)$$

$$f(1\,0\,0) = (2\,0) \qquad f(0\,1\,0) = (0\,1) \qquad f(0\,0\,1) = (0, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y-z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \\ y-z &= 5 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow$$

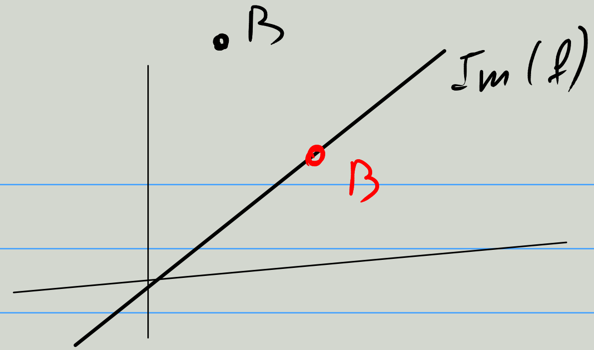
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \ ?$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff \dim \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \dim \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff rk(A) = rk(A|B).$$



Ho dimostrato che data una base di V, la sua immagine mediante f è un sistema di generatori di $Im(f)$. È una base di $Im(f)$? No

Studiamo quando lo sono.
(In realtà vogliamo capire quanto vale $\dim Im(f)$)

Def. Sia $f: V \to W$ lineare. Si dice nucleo di f o $\ker f$ (kernel) l'insieme

$$\ker f := \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0} \}$$

N.B Se f è descritta rispetto $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ da una matrice A $\Rightarrow$ $\ker f$ corrisponde ai vettori le cui componenti rispetto a $\mathcal{B}$ sono date dalle soluzioni di $AX = \underline{0}$

$\rightarrow$ $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V

Teorema $\ker f \leq V$

DIM: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \ker f$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \ker f$$

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \alpha \cdot \underline{0} + \beta \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \ker f$ $\square$

V $\qquad\qquad\qquad\qquad$ W

$\ker f$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\operatorname{Im} f$

(da quanto visto prima $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk}(A) =$

$$= \dim V - \dim \operatorname{Im}(A)$$

$$\Rightarrow \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = \dim V)$$

<u>Teorema:</u> Sia $f: V \to W \Rightarrow f$ è una funzione iniettiva.

$\Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$.

In particolare se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ manda sequenze libere di V in sequenze libere di W.

Dim: Supponiamo $\ker f = \{0\}$ e che per assurdo $\exists\, \bar{x}, \bar{y} \in V$ tali che $\bar{x} \neq \bar{y}$ e

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\bar{x} - \bar{y}) = \underline{0} \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in \ker f = \{\underline{0}\}\ \text{\textit{y}}$$

$\Rightarrow$ se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ é iniettiva.

Viceversa se $f: V \to W$ é iniettiva

$\Rightarrow$ la preimmagine di $\underline{0} \in W$ può essere solo un elemento, ma

$\underline{0} \in \ker f \Rightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$ $\square$

Supponiamo che $\ker f = \{\underline{0}\}$ e sia

$B = (\bar{e}_1 \text{———} \bar{e}_n)$ una base di V.

consideriamo $\bar{e}_1' = f(\bar{e}_1)$

$\vdots$

$\bar{e}_n' = f(\bar{e}_n)$

Vogliamo dimostrare che $(\bar{e}_1' \,\text{—}\, \bar{e}_n')$ é una seq. libera

Supponiamo per assurdo

$\bar{e}_1' \,\text{—}\, \bar{e}_n'$ legata

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1 \,\text{—}\, \alpha_n : \quad \alpha_1 \bar{e}_1' + \,\text{—}\, + \alpha_n \bar{e}_n' = \underline{0}$

con $(\alpha_1 \,\text{—}\, \alpha_n) \neq (0 \,\text{—}\, 0)$

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{e}_1' + \,\text{—}\, \alpha_n \bar{e}_n' = \underline{0}$

$\|$

$\alpha_1 f(\bar{e}_1) + \,\text{—}\, + \alpha_n f(\bar{e}_n) =$

$$= f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \_\_\_\_ + \alpha_n e_n)$$

D'altro canto f é iniettiva $\Rightarrow$

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \_\_\_\_ + \alpha_n \bar{e}_n = \underline{0}$$

ma $\bar{e}_1 \_\_\_\_ \bar{e}_n$ era libera per ipotesi $\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \_\_\_\_ = \alpha_n = 0 \qquad \lightning$$

Se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ manda sequenze libere in sequenze libere

Se $\ker f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists$ almeno una seq. libera di V che viene mandata in una sequenza legata di W.

Quale? Prendere $\bar{v} \in \ker f$ $\bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow f(\bar{v}) = \underline{0}$

DOMANDA: Come è fatto l'insieme delle preimmagini di $\bar{w} \in \operatorname{Im} f \subseteq W$?

Se $\ker f = \{0\}$. $\bar{w}$ ammette esattamente una preimmagine $\bar{v}$

Altrimenti sia $\bar{v}, \bar{v}'$ due preimmagini di $\bar{w}$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) - f(\bar{v}') = \bar{w} - \bar{w} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\bar{v} - \bar{v}') = \underline{0} \Rightarrow \bar{v} - \bar{v}' \in \ker f.$$

Viceversa se $\bar{v}$ preimmagine di $\bar{w}$ e $\bar{x} \in \ker f$

$$\Rightarrow f(\bar{v} + \bar{x}) = f(\bar{v}) + f(\bar{x}) = \bar{w} + \underline{0} = \bar{w}$$

Quindi le preimmagini di $\bar{w}$ sono del tipo

$$\boxed{\bar{v}' + \ker f := \{ \bar{v}' + \bar{z} \mid z \in \ker f \}}$$

e $\bar{v}'$ é una fissata preimmagine di $\bar{w}$

$\longrightarrow$ $AX = B$ sono del tipo $\bar{X} + Z$ con $AZ = \underline{0}$

$f^{-1}(\bar{w})$. é del tipo $\bar{v}' + \bar{z}$ con $\bar{z} \in \ker f$

Teorema: Nullitá più rango $\quad f: V \to W$

$\text{Nullitá}(f) = \dim \ker f$

$\text{Rango}(f) = \dim \operatorname{Im} f$

$$\boxed{\dim V = \text{Nullitá}(f) + \text{Rango}(f)}$$

DIM: Partiamo da una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \_\_ \bar{e}_k')$ di $\operatorname{Im}(f)$

e consideriamo $(\bar{e}_1 \_\_ \bar{e}_k)$ seq. di vettori di

V tali che $f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1' - f(\bar{e}_k) = \bar{e}_k'$

la sequenza $(\bar{e}_1 - \bar{e}_k)$ è libera perché la cop. lin. della sua immagine ha $\dim = k$ e quindi la dimensione della sua copertura lineare non può essere più piccola di k $\Rightarrow$ per Steinitz k vettori che generano uno s.vett. di $\dim = k$ sono liberi.

Se $\ker f = \{\bar{0}\}$ $\Rightarrow$ non c'è nulla da dimostrare perché f è iniettiva e manda una base di V in una base di $\operatorname{Im} f$.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim V = \dim \operatorname{Im} f + 0 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

Altrimenti sia $\overline{u}_1 - \overline{u}_r$ una base di $\ker f$

e consideriamo la sequenza

$$(\overline{u}_1 - \overline{u}_r \ \overline{e}_1 - \overline{e}_k) \qquad (*)$$

CLAIM: $(*)$ è una base di V.

A) $(*)$ è una sequenza di generatori per V.

Infatti sia $\overline{v} \in V \Rightarrow V$ è c. lineare

di $\overline{e}_1 - \overline{e}_k \ \overline{e}_{k+1} - \overline{e}_n$ vettori di

una base di V che contiene

$\overline{e}_1 - \overline{e}_k$ ma

$$f(\overline{v}) = \alpha_1 f(\overline{e}_1) + \ldots + \alpha_k f(\overline{e}_k) +$$

$$+ \alpha_{k+1} f(\overline{e}_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(\overline{e}_n) =$$

$$= \beta_1 f(\bar{e}_1) + \text{———} + \beta_k f(\bar{e}_k)$$

$$(\bar{v} - \beta_1 \bar{e}_1 \text{———} - \beta_k \bar{e}_k) \in \ker f$$

$\Rightarrow \bar{v} - (\beta_1 \bar{e}_1 - \text{———} - \beta_k \bar{e}_k)$ é comb. lineare degli $\bar{u}_1 \text{———} \bar{u}_n$

$\Rightarrow \bar{v}$ é c. lineare di $\bar{u}_1 \text{———} \bar{u}_n$ e pure $\bar{e}_1 \text{———} e_k \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bar{u}_1 \text{———} \bar{u}_n \; \bar{e}_1 \text{———} \bar{e}_k)$ é sistema di generatori per V.

$\bar{u}_1 \text{———} \bar{u}_n \bar{e}_1 \text{———} \bar{e}_k$ é libera

Infatti sia $\alpha_1\overline{u}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{u}_n + \beta_1\overline{e}_1 + \ldots \beta_r\overline{e}_r = \underline{0}$

con coeff. non tutti nulli

$\Rightarrow$ Non possono essere $\alpha_1 = \alpha_n = \ldots = \alpha_n = 0$

perché altrimenti avremmo una c. lineare

dei $\overline{e}_i$ a coeff. non tutti nulli che dà $\underline{0}$

e similmente non posso essere

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$$

Consideriamo

$$f(\underline{0}) = f(\alpha_1\overline{u}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{u}_n + \beta_1\overline{e}_1 + \ldots + \beta_r\overline{e}_r)$$

$$= f(\beta_1\overline{e}_1 + \ldots + \beta_r\overline{e}_r) =$$

$$= \beta_1 f(\overline{e}_1) + \ldots + \beta_r f(\overline{e}_r) = \underline{0}$$

$=$ c. lineare di vettori di una base di W che dà $\underline{0}$ $\Rightarrow$

$\beta_1 = \beta_2 = \text{———} = \beta_k = 0$ $\lightning$

Ne segue che la seq. è libera

$\rightarrow$ seq. libera di generatori in V $\Rightarrow$ la lunghezza della seq. deve essere dim V

$\square$