Autovalori ed autovettori

- **Def:** Due sottospazi $U, W \leq V(\mathbb{K})$ si dicono in somma diretta se ogni vettore $\bar{v}$ di $U \oplus W$ si scrive in modo unico come $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ con $\bar{u} \in U$, $\bar{w} \in W$.

E se di sottospazi ce ne sono più di 2?

U_i $i = 1 \ldots k$ ____ sono in somma diretta

se $\forall\ \bar{v} \in U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$

$\forall_i\ \exists!\ \bar{u}_i \in U_i$ tali che $\bar{v} = \bar{u}_1 + \ldots + \bar{u}_k$

N.B $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ sono in somma diretta se

$W = U_1 \oplus U_2$ sono in somma diretta e

$(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 = W \oplus U_3$ sono in somma diretta

Definizione di autovalore.

- Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata.

Ci chiediamo quando $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tali che

AX sia proporzionale ad X

cioè $\boxed{AX = \lambda X}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$

Risposta: sempre $\to X = \underline{0}$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo quando l'equazione $\boxed{AX = \lambda X}$ (*)

ammette una soluzione $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (non banale).

Una soluzione X non banale per (*) è detta <u>autovettore</u> di A di <u>autovalore</u> λ. di A

Quali sono i possibili autovalori ed autovettori per A?

$$\boxed{AX = \lambda X} \quad (*)$$

$$AX = \lambda I X$$

$$\boxed{(A - \lambda I) X = \underline{0}} \quad (*')$$

sistema lineare omogeneo
in X con parametro λ.

Quando $(*')$ ammette autosoluzioni (cioé soluzioni $\neq \underline{0}$)?

Quando ci sono soluzioni diverse da $\underline{0}$ (che c'é sempre)

→ quando il sistema non é di cramer

→ quando $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

equazione caratteristica
di A

Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica di A.

Gli autovettori associati ad un autovalore $\bar{\lambda}$ fissato sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - \bar{\lambda} I) X = \underline{0}$$

diverse dalla soluzione banale

L'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ associato all'autovalore $\bar{\lambda}$ è l'insieme di tutte le soluzioni di

$$(A - \bar{\lambda} I) X = \underline{0}$$

cioè l'insieme di tutti gli autovettori di autovalore $\bar{\lambda}$ unito con $\{\underline{0}\}$

N.B. In quanto insieme di soluzioni di un sistema lineare omogeneo $V_{\bar{\lambda}}$ é spazio vettoriale e

$$\dim(V_{\bar{\lambda}}) = n - rk(A - \bar{\lambda} I) \geq 1$$

Def: Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di A

$\bar{\lambda} \in Spec(A)$ Spec = Spectrum

$\Rightarrow$ si dicono

- molteplicitá geometrica di $\bar{\lambda}$

$$g_{\bar{\lambda}} = \dim V_{\bar{\lambda}} = n - rk(A - \bar{\lambda} I)$$

- molteplicitá algebrica di $\bar{\lambda}$

$a_{\bar{\lambda}}$ = numero di volte in cui $\bar{\lambda}$ é radice dell'equazione caratteristica

- Si dice che $\bar{\lambda}$ è <u>regolare</u> se $a_{\bar{\lambda}} = g_{\bar{\lambda}}$

  (vale sempre $g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$)

- il polinomio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è detto

  polinomio caratteristico di A

- $p_A(\lambda) = 0 \rightarrow$ equazione caratteristica

Calcolare gli autospazi di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) Si calcola $\mathrm{Spec}(A)$ risolvendo l'eq. caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ $\nearrow a_{\bar{\lambda}}$

2) $\forall\ \bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$ si risolve il sistema omogeneo,

$$(A-\bar{\lambda}I)X=\underline{0}$$

e si determina $V_{\bar{\lambda}}$ $\rightarrow g_{\bar{\lambda}}$

Def. Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ due matrici.

Si dice che A e B sono <u>simili</u> se

$\exists\ P \in GL(n, \mathbb{K}) = \{ W \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det W \neq 0 \}$.

tale che $\boxed{B = P^{-1}AP}$ ovvero $\boxed{PB = AP}$

Il prodotto di matrici non é commutativo!!!

OSSERVAZIONI

1) "essere simili" é una relazione di equivalenza in $\mathbb{K}^{n,n}$

A) $A = IA = AI = A$ $\quad A \sim A$

B) $PB = AP \Rightarrow P^{-1}PBP^{-1} = P^{-1}APP^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad BP^{-1} = P^{-1}A \qquad \rightarrow \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

c) $A \sim B \Rightarrow \quad B = P^{-1}AP$

$B \sim C \Rightarrow \quad C = Q^{-1}BQ \qquad P, Q \in GL(n, \mathbb{K})$

$$\Rightarrow C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ =$$

$$= (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \sim C$$

2) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi stesso determinante e stessi autovalori

DIM $\quad B = P^{-1}AP$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I}) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) =$$

$$= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) =$$

$$= \underbrace{\det(P^{-1}P)} \det(A - \lambda I) = 1 \cdot \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$$

Gli autovalori di A (e B) sono le radici di $p_A(\lambda)$

Il determinante di A è $p_A(0) = p_B(0)$ $\square$

<u>NB</u> Se $A \sim B \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$

$\Rightarrow A$ è invertibile $\Leftrightarrow B$ è invertibile.

$$A \sim I \Rightarrow \exists P : \quad AP = PI = P$$

$$AP = P \Rightarrow A = I$$

<u>Def</u> Una matrice $A^{n,n}_{\mathbb{K}}$ è detta <u>diagonalizzabile</u> se A è simile ad una matrice D diagonale

(cioè ad una matrice D in cui le uniche entrate non nulle sono sulla diagonale principale)

In particolare abbiamo $PD = AP$

D è detta matrice diagonale

P è detta matrice diagonalizzante.

Teorema: Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ ammette una base formata da autovettori per A

$$\boxed{PD = AP}$$

DIM: A diagonalizzabile

Sia $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$

$$AP = PD \qquad A \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \cdots & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix}$$

Se A é diagonalizzabile $\quad P_1 \cdots P_n$ é una base di $\mathbb{K}^n$ perché $\det(P) \neq 0$

e $\quad AP_i = \lambda_i P_i \quad \forall i$

$\Rightarrow \mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A

Viceversa: Supponiamo $P_1 \cdots P_n$ vettori colonna che formano una base di autovettori per $\mathbb{K}^n$

e $A P_i = \lambda_i P_i \quad \forall i$

$$\Rightarrow \quad A \underbrace{(P_1 \ \_\_\_ \ P_n)}_{P} = (AP_1 \ \_\_\_ \ AP_n) =$$

$$= (\lambda_1 P_1 \ \_\_\_ \ \lambda_n P_n) =$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = PD$$

$\Rightarrow A$ é diagonalizzabile $\quad \square$

Quando $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori?

$\rightarrow$ Quando $\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} + \_\_\_ + V_{\lambda_t}$ ove $\lambda_1 \ \_\_\_ \ \lambda_t$ sono gli autovalori distinti di A

Teorema $\quad \forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$ si ha

$$1 \leq g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$$

DIM

Sia $\bar{\lambda} \in Spec(A)$ e $V_{\bar{\lambda}}$ il corrispondente autospazio

$V_{\bar{\lambda}}$ ammette base $B_{\bar{\lambda}}$ composta da $g_{\bar{\lambda}} = m$ vettori $\rightarrow$ $B_{\bar{\lambda}} = (x_1 \text{ — } x_m)$

completiamo $B_{\bar{\lambda}}$ a base $\tilde{B}$ di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n-m$ vettori $y_{m+1} \text{ — } y_n$

Consideriamo la matrice P che contiene come colonne $(x_1 \text{ — } x_m\, y_{m+1} \text{ — } y_n)$

$$AP = (Ax_1 \; Ax_2 \text{ — } Ax_m \; Ay_{m+1} \text{ — } Ay_n) =$$

$$= \left(\bar\lambda X_1 \;\; \bar\lambda X_2 \;\; \cdots \;\; \bar\lambda X_m \;\; Z_{m+1} \;\; \cdots \;\; Z_n \right) =$$

$$= P \begin{pmatrix} \begin{matrix} \bar\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda \end{matrix} & \Big| & \cdots & \Big| \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

m volte

altri vettori colonna

$$P^{-1} A P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda \end{matrix} & F \\ \hline 0 & G \end{array} \right) = H$$

matrice simile a A a blocchi

$$\det(H - \lambda I) = (\bar\lambda - \lambda)^m \det(G - \lambda I_{n-m})$$

in particolare la molteplicità algebrica di $\bar\lambda$ come autovalore di H è almeno m

ma visto che $\det(H-\bar{\lambda}I)=\det(A-\bar{\lambda}I)$

ne segue che $a_{\bar{\lambda}}$ in A é almeno m

$$\Rightarrow \quad a_{\bar{\lambda}} \geq g_{\bar{\lambda}} = m \qquad \square$$

<u>N.B</u> $\quad g_{\bar{\lambda}} \geq 1$ perché $\operatorname{rk}(A-\bar{\lambda}I) < n$

<u>OSS:</u> Il polinomio caratteristico é $\det(A-\lambda I) \Rightarrow$

é un polinomio di grado n.

allora $\displaystyle\sum_{\bar{\lambda}\in \operatorname{Spec}(A)} a_{\lambda} \leq n$

perché un polinomio di grado n ha al più n radici (contate con le debite molteplicitá)

$$|\operatorname{Spec}(A)| \leq \sum_{\bar{\lambda}\in \operatorname{Spec}(A)} g_{\bar{\lambda}} \leq \sum_{\bar{\lambda}\in \operatorname{Spec}(A)} a_{\bar{\lambda}} \leq n$$

ABBIAMO CHE SICURAMENTE COME CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ A SIA DIAGONALIZZABILE SERVE

$$\boxed{\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} a_{\bar{\lambda}} = n}$$

[In altre parole l'equazione caratteristica $p_A(\lambda)=0$ deve avere tutte le sue radici in $\mathbb{K}$]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + 1$$

sicuramente se $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ non é diagonalizzabile

se $A \in \mathbb{C}^{2,2} \rightarrow$ ha 2 autovalori distinti (sará diagonalizzabile).

$$|Spec(A)| \le \sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} g_{\bar{\lambda}} \le \sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} a_{\bar{\lambda}} \le n$$

Vorremmo poter dire $\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} g_{\bar{\lambda}} = n$ condizione suff affinché A sia diagonalizzabile / (sarà vero).

Ricordiamo che A diag. $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori

$$\Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \bigoplus_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} V_{\bar{\lambda}}$$

$$\dim\left(\bigoplus V_{\bar{\lambda}}\right) = n$$

$$\dim\left(\bigoplus V_{\bar{\lambda}}\right) \le \sum g_{\bar{\lambda}}$$

cosa ci garantisce $\dim\left(\bigoplus V_{\bar{\lambda}}\right) = \sum g_{\bar{\lambda}}$?

Il fatto che gli autospazi sono in somma diretta fra loro (Δ)

Se vale (Δ) abbiamo A diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

$$\sum g_{\bar{\lambda}} = n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum a_{\bar{\lambda}} = n \text{ e } \forall \bar{\lambda} \in Spec(A),$$

$$a_{\bar{\lambda}} = g_{\bar{\lambda}}$$

cioè Tutte le radici dell'eq. caratteristica sono in $\mathbb{K}$ e ogni autovalore è regolare.

<u>Teorema</u>: Siano $\lambda_1, \lambda_2 \text{ — } \lambda_t$ autovalori distinti di A

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \text{———} \oplus V_{\lambda_t}$$

DIM DI (Δ)

per induzione su t

t = 2.

Siano V_{λ_1} e V_{λ_2} due autospazi distinti

e sia $X \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow$

$$AX = \lambda_1 X = \lambda_2 X = AX$$

$\Rightarrow \lambda_1 X = \lambda_2 X$ da cui $(\lambda_1 - \lambda_2) X = \underline{0}$

ma ció significa $\lambda_1 = \lambda_2$ (assurdo perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

oppure $X = \underline{0}$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\underline{0}\} \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}.$$

Supponiamo $t \geq 3$ e che la proprietà valga per $t-1$ autospazi distinti $\rightarrow$ mostriamo che vale per t autospazi distinti

$X \in V_{\lambda_1} + \_\_\_ + V_{\lambda_t}$ con

$$X = X_1 + X_2 + \_\_\_ + X_t = $$
$$= y_1 + y_2 + \_\_\_ + y_t \quad \text{con } X_i, y_i \in V_{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow (X_1 - y_1) + (\overset{=0}{X_2 - y_2}) + \_\_\_ + (\overset{=0}{X_t - y_t}) = \underline{0} \quad (*)$$

$\lambda_1 \neq 0$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 (X_1 - y_1) + \lambda_1 (X_2 - y_2) + \_\_\_ + \lambda_1 (X_t - y_t) = \underline{0}}$$

$$A\left((x_1-y_1)+ \text{———} +(x_t-y_t)\right) = A\underline{0} = \underline{0}$$

$$\boxed{\lambda_1(x_1-y_1)+\lambda_2(x_2-y_2)+ \text{———} +\lambda_t(x_t-y_t) = \underline{0}}$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)(x_2-y_2)+(\lambda_1-\lambda_3)(x_3-y_3)+ \text{———} +(\lambda_1-\lambda_t)(x_t-y_t)=\underline{0}$$

in questa espressione sono coinvolti solo $t-1$ autospazi e dunque per ipotesi induttiva essi sono in somma diretta; inoltre $\lambda_1-\lambda_i\neq 0 \quad i\neq 1$

Ne segue $x_2=y_2 \quad x_3=y_3 \quad \text{———} \quad x_t=y_t$

Ma adesso rileggiamo l'eq. originaria (*)

da (*) segue $x_1=y_1 \Rightarrow x$ si scrive in modo unico e dunque $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}$

$\square$

Corollario

$$\dim \bigoplus_{\lambda_i \in Spec(A)} V_{\lambda_i} = \sum_{\lambda_i \in Spec(A)} \dim\left(V_{\lambda_i}\right) = \sum_{\lambda_i \in Spec(A)} g_{\lambda_i}$$

$\#$