Spazi vettoriali Euclidei:

→ ~~p~~ teorema della base spettrale.

$V_n^0(\mathbb{R})$ dotati di un prodotto scalare definito positivo.

- Data una base $\mathcal{B}$ di $V_n^0(\mathbb{R})$ é sempre possibile costruire una base ortonormale di $V_n^0(\mathbb{R})$ mediante G/S.

1) Rispetto una base ortonormale $\tilde{\mathcal{B}}$ le componenti di un vettore $\bar{v} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ coincidono con i suoi coeff. di Fourier.

2) La matrice che rappresenta il prodotto scalare o rispetto una base ortonormale è la matrice identica.

$$\tilde{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n) \qquad \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_n \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \bar{e}_n \cdot \bar{e}_1 & & \cdots & \bar{e}_n \cdot \bar{e}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

OSS: Sia A una matrice di cambiamento di base fra 2 basi ortonormali
$\Rightarrow A$ é una matrice ortogonale, cioé $\boxed{A^{-1} = {}^tA}$

DIM: Sia F la matrice del prod. scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e F' la matrice del prod. scalare rispetto $\mathcal{B}'$.
poiché $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono orto~~gon~~normali
$F = F' = I_n$

ma in generale $F = {}^tA F' A$

perché questa è la forma

con cui cambiano le matrici delle

forme bilineari.

$$\Rightarrow \quad I = {}^tA I A = {}^tA A$$

da cui $\boxed{{}^tA = A^{-1}}$ $\square$

COMMENTO: siccome A è ortogonale

$\Rightarrow$ ${}^tA$ è ortogonale

$\Rightarrow$ in particolare se le ~~colonne~~ righe di A formano un sistema.

di vettori ortonormale $\Rightarrow$ anche le sue colonne lo sono.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = {}^tA$ per A

$\Rightarrow \cancel{{}^tA^{-1} = {}^t({}^tA) = ({}^tA)^{-1}}$

${}^tA^{-1} = A$ vale anche per ${}^tA$

Sia $V_n^0(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale euclideo. e sia $W \le V_n^0(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$

$$W^{\perp} \oplus W = V_n^{\circ}$$

il complemento ortogonale di W è un complemento diretto di W in V_n°

Es

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x\ y\ z) \cdot (2\ 1\ -1) = 0 \} =$$

$$= \{ (2\ 1\ -1) \}^{\perp}$$

$$W^{\perp} = \mathcal{L} \{ (2\ 1\ -1) \}^{\perp\perp} = \mathcal{L}((2\ 1\ -1))$$

DIM: Innanzi tutto facciamo vedere

che $W \oplus W^{\perp}$.

Lo mostriamo facendo vedere

che $W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$.

Infatti sia $\bar{x} \in W \cap W^{\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow \|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$.

Mostriamo ora che $W \oplus W^{\perp} = V_n^{\circ}$.

Sia $\mathcal{B}_W$ una base ortonormale di W

e sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}'$ una base di V_n°

ottenuta completando a base $\mathcal{B}_W$.

Adesso applichiamo G/S a $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ I vettori che sono nella base $\mathcal{B}_W$ di W sono già ortonormali fra loro $\Rightarrow$ G/S li lascia invariati

OTTERREMO UNA BASE

$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}_W \cup \tilde{\mathcal{B}}$ di $V_n^0(\mathbb{R})$.

ORTONORMALE.

Poniamo $U = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$. e osserviamo che ogni vettore di U è ort. ad ogni vettore di $\mathcal{B}_W$ e dunque ad ogni vettore di W

$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq W^\perp$ ma abbiamo

$$\dim \mathcal{U} = n - \dim W$$

per costruzione.

D'altro canto $\dim W^\perp + \dim W \leq n = \dim V$

$$\dim W^\perp \leq n - \dim W = \dim \mathcal{U}$$

$\Rightarrow$ $\dim W^\perp = \dim \mathcal{U}$ perché

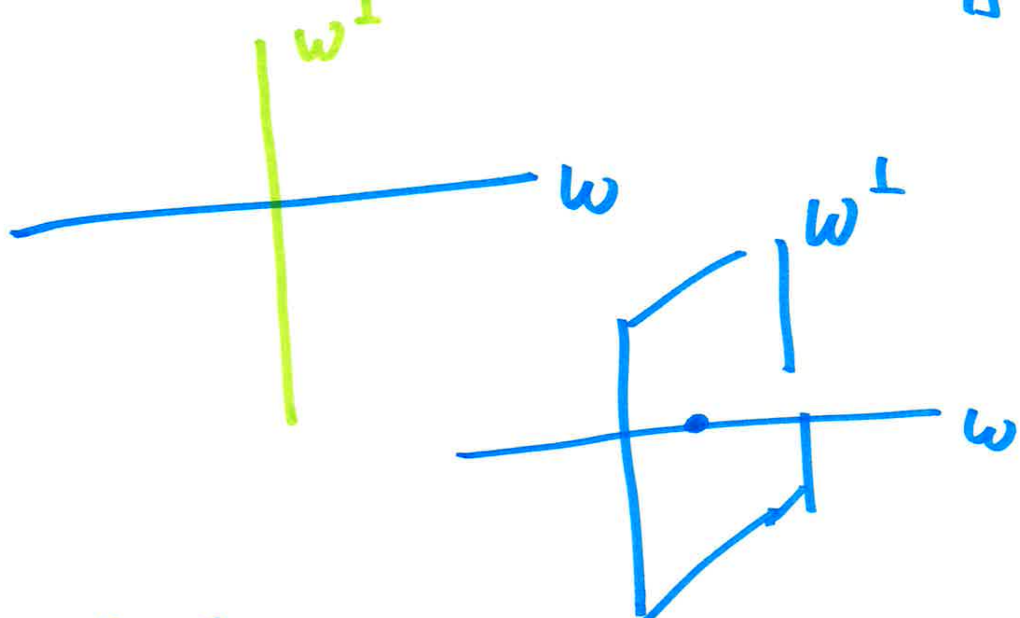
$$\dim \mathcal{U} \leq \dim W$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} = W^\perp$ e $\dim W^\perp = n - \dim W$. #

Corollario $W^{\perp\perp} = W$ infatti

$W \subseteq W^{\perp\perp}$ ma $\dim W^{\perp\perp} = n - (n - \dim W) =$

$= \dim W$ quindi $W^{\perp\perp} = W$. $\square$



<u>N.B</u>: Se X é un insieme $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$$

Applicazione ai sistemi lineari.

i vettori di $\{R_1 \dots R_m\}^\perp$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1\ 2\ 3) \cdot (x\ y\ z) = 0 \\ (2\ 0\ 5) \cdot (x\ y\ z) = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(1\,2\,3), (2\,0\,5)\}^\perp$$

$$S^{\perp\perp} = \mathcal{L}((1\,2\,3), (2\,0\,5))$$

<u>Teorema</u>: Sia $AX = \underline{0}$ un sis. lineare omogeneo ~~m equazioni~~ in n incognite.

$$AX = \cancel{B}\ \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} R_1 \cdot {}^tX = 0 \\ R_2 \cdot {}^tX = 0 \\ \vdots \\ R_m \cdot {}^tX = 0 \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono tutti e soli

$\Rightarrow \dim S = n - rk(A)$

ove S = spazio vettoriale delle soluzioni di $AX = \underline{0}$.

<u>DIM</u>: $S = R_A^{\perp}$ ove R_A = insieme delle righe di A

$\Rightarrow \dim S = n - \dim \mathcal{L}(R_A) =$

$= n - rk(A)$. $\square$

S = ~~insieme~~ spazio vettoriale delle soluzioni

$S^{\perp}$ = spazio vettoriale delle equazioni

Es:

$$W = \mathcal{L}((1230),(0121)).$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 2$$

le eq. che definiscono W sono una base per $W^\perp$ rispetto prod. scal. standard.

$$\begin{cases} (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\cdot(1230) = 0 \\ (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\cdot(0121) = 0 \end{cases}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$
$$a_2 + 2a_3 + a_4 = 0$$

$W^{\perp}$

$$\cancel{a}\qquad a_1 = -2a_2 - 3a_3$$
$$a_4 = -a_2 - 2a_3$$

$$(-2a_2 - 3a_3,\ a_2,\ a_3,\ -a_2 - 2a_3) =$$

$$= a_2\,\underline{(-2, 1, 0, -1)} + a_3\,\underline{(-3\ \ 0\ \ 1\ \ -2)}$$

$$\begin{cases} -2x + y - t = 0 \\ -3x + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Teorema della base spettrale

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = {}^tA$

DIM: A ortogonalmente diag.

$\Rightarrow \exists\ P \in GL(n, \mathbb{R})$ con $P^{-1} = {}^tP$

$D \in \mathbb{R}^{n,n}$

tali che $AP = PD$

$\Rightarrow P^{-1}AP = D \Rightarrow {}^tPAP = D \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^t({}^tPAP) = {}^tD = D \Rightarrow$

$${}^tP\,{}^tA\,P = D = {}^tP\,A\,P$$

moltiplichiamo a sx per P e a dx per ${}^tP = P^{-1}$ e otteniamo

$$\underbrace{P\,{}^tP}_{I}\,{}^tA\,\underbrace{P\,{}^tP}_{I} = \underbrace{P\,{}^tP}_{I}\,A\,\underbrace{P\,{}^tP}_{I} \Rightarrow {}^tA = A$$

A é simmetrica.

Viceversa $A = {}^tA \Rightarrow \exists P$ con ${}^tP = P^{-1}$ che diagonalizza A.

Se A matrice 1×1 non c'è nulla da dimostrare.

Ragioniamo per induzione su n = ordine della matrice A.

$\boxed{n=1}$ Se la proprietà vale per ogni matrice reale e simmetrica di ordine $\boxed{n-1}$ $\Rightarrow$ vale per ogni matrice reale e simmetrica.

Sia $A = {}^tA \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sia λ un autovalore di A. Sappiamo $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia X uno degli autovettori reali corrispondenti a λ.

Poniamo $P = (X \; X_2 \dots X_n)$ matrice in cui la prima colonna é X (eventualmente $\frac{X}{\|X\|}$) e le rimanenti colonne di P sono con la prima una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^tX \\ {}^tX_2 \\ \vdots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} A \left(X \; X_2 \dots X_n \right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} {}^tX \\ \vdots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} \left(AX \; AX_2 \dots AX_n \right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} {}^tX \\ \vdots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} \left(\lambda X \; AX_2 \dots AX_n \right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc}
\lambda\, {}^tXX & {}^tXAX_2 & \dots & {}^tXAX_n \\
\lambda\, {}^tX_2X & {}^tX_2AX_2 & \dots & {}^tX_2AX_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\lambda\, {}^tX_nX & {}^tX_nAX_2 & \dots & {}^tX_nAX_n
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc}
\lambda & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & {}^tX_2AX_2 & \dots & {}^tX_2AX_n \\
0 & \vdots & & \\
\vdots & & & \\
0 & {}^tX_nAX_2 & \dots & {}^tX_nAX_n
\end{array}\right)
$$

questo blocco è una matrice C $(n-1)\times(n-1)$ reale e simmetrica.

$$
{}^tXAX_2 = \\
= {}^tX\,{}^tAX_2 = \\
= {}^t(AX)X_2 = \\
= \lambda\, {}^tXX_2 = \\
= 0
$$

$$
{}^tX_iAX_j = \\
= {}^t({}^tX_iAX_j) = \\
= ({}^tX_j\,{}^tAX_i) = \\
= {}^tX_jAX_i
$$

Abbiamo mostrato che $\exists\ P_0$ tale che

$$ {}^tP_0 A P_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & C = {}^tC \end{array}\right) \qquad {}^tP_0 = P_0^{-1} $$

per ipotesi induttiva $\exists\ Q \in GL(n-1, \mathbb{R})$
con ${}^tQ = Q^{-1}$ e ${}^tQ C Q = D_1$
matrice diagonale.
poniamo $\quad P_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$

$$ {}^tP_1\left({}^tP_0 A P_0\right)P_1 = {}^tP_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) P_1 = $$

$$ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^tQ\,C\,Q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D_1 \end{array}\right) = $$

matrice diagonale. $= {}^tPAP$

Inoltre se $P = P_0 P_1$ è ${}^tP \cdot P = {}^tP_1\, {}^tP_0\, P_0\, P_1 =$

$$ = {}^tP_1\, P_1 = I $$

quindi $P = P_0 P_1$ è una matrice ortogonale

e $P^{-1} A P = {}^tPAP$ è una matrice diag. $\square$

$$\mathbb{C}((t)) = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \;\middle|\; \begin{array}{l} f, g \text{ polinomi} \\ g(t) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

$\nearrow$

campo delle funzioni razionali in $\mathbb{C}$.

$$\frac{1}{f(t)} \qquad \begin{array}{l} f(t) \\ \{1, t, t^2, t^3 \dots \end{array}$$

$g(t) = 1$, $f(t) = \alpha \in \mathbb{C}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(2\,0\,1) * (1\,0\,3) = 5}$$

$$(2\,0\,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$(4 \;\; k \;\; 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$4 + 12 = 5$ NON $\exists\, k$

$$(2\,0\,1) * (0\,1\,3) = 5$$

$$(4\;k\;4)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = 5$$

$$k + 12 = 5$$

$$k = -7$$