

Dato una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiamo

$$\text{Ker}(A) = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \underline{0} \}.$$

$\text{Ker}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

(perché insieme soluzioni di un sistema omogeneo).

$$\text{null}(A) := \dim \text{Ker}(A)$$

Teorema

$$\boxed{\text{null}(A) + \text{rk}(A) = n}$$

$$\text{null}(A) = n - \text{rk}(A)$$

Se abbiamo un sistema compatibile $AX = B$

con $k = \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$ in m equazioni ed n incognite

$\Rightarrow$ il sistema ha ∞^{n-k} soluzioni

$n - k =$ dimensione dello s.vettoriale delle soluzioni $AX = \underline{0}$
 $= \text{null}(A) = \dim \ker(A)$

RIDUZIONE GAUSSIANA PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI
LINEARI

Risoluzione sistemi

Codice Python per risoluzione di sistemi
(non ottimizzato)

import numpy as np

Input: matrice completa A|B

Output: matrice ridotta

def solveGauss(m, verbose=True):

n=m.copy()

rows, cols=n.shape

print("-----")

print("Matrice incompleta:")

print(m[:,range(cols-1)])

print("Termini noti:")

print(m[:,cols-1])

print("\nRiduzione")

itera su tutte le posizioni

for i in range(rows):

Riduzione righe

k=np.nonzero(n[i,:])[1]

if len(k)==0:

continue

k=k[0]

n[i,:]/=n[i,k]

for j in range(rows):

if i==j:

continue

n[j,:]-=n[i,:]*n[j,k]

if verbose:

print(n,"\n")

return n

Stampa soluzione in forma polinomiale

def getSol(n):

rows, cols = n.shape

fix = []

sol=np.zeros(cols-1)

gen=np.matrix(np.zeros((cols-1,cols)))

for i in range(rows):

k=np.nonzero(n[i,:])[1]

if len(k)==0:

continue

if k[0]==cols-1:

print("Sistema non compatibile")

return False

fix.append(k[0])

print ("x(",k[0]+1,")=",n[i,cols-1],sep='',end='')

sol[k[0]]=n[i,cols-1]

for j in k:

1 NP VT (A/B)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

A B

$$0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A' \quad B'$$

$$0 = 1$$

matrice ridotta
con solve Gauss

*
k.any():

→ ci accorgiamo
che il sistema
non è compatibile

```

print("+(", -
n[i,j],")*x(",j+1,")", sep='', end='')
    gen[k[0],j]=-n[i,j]
    print("")
    for i in range(cols-1):
        if not i in fix:
            print("x(",i+1,")=x(",i+1,")", sep='')
            gen[i,i]=1.
    # restituisce solo le colonne non nulle (e traspone)
    gen = [ x for x in np.array(gen.transpose()) if x.any() ]
    print("")
    return np.matrix(sol), np.matrix(gen)
def checkSol(m,s,gen):
    rows, cols=m.shape
    print("Matrice incompleta:")
    print( m[:,range(cols-1)] )
    print("Termini noti:")
    print( m[:,cols-1] )
    print("Soluzione particolare: ")
    print(s)
    print("Generatori soluzioni sistema omogeneo associato:")
    print(gen)
    print(" --- verifica  $AS^t-B=0$  ---")
    res=m[:,range(cols-1)]*s.transpose()-m[:,cols-1]
    print(res)
    print(" --- verifica  $AZ^t=0$  --- ")
    res2=m[:,range(cols-1)]*gen.transpose()
    print(res2)
    return res,res2
# Esempi
AB=np.matrix('1,2,3,0,5,6,2; 2,4,6,0,10,12,4; 0,3,2,1,0,0,-1;
1,2,5,3,2,1,2; 0,0,0,1,2,0,1')*1.
R=solveGauss(AB)
s,gen=getSol(R)
print(checkSol(AB,s,gen))
AB2=np.matrix(np.random.randint(0,high=10,size=(6,10)))*1.
R2=solveGauss(AB2)
s2,gen2=getSol(R2)
print(checkSol(AB2,s2,gen2))

```

sol. particolare

→ h.d. del
sol. sistema
omogeneo associato

fare tutti test
randomizzati

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 09/2/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ 2x - y - kz = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2y + (k-1)z = 0 \end{cases}$$

4 eq in 3 incognite
omogeneo $\rightarrow 0$

- Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq -1, 2$ soluzione unica, $k = -1, 2$ ∞^1 soluzioni (pt.3)

- Si indichino i valori del parametro k per i quali la terna $(3, -4, 5)$ è soluzione del sistema;

Risposta $k = 2$ (pt.1)

- Posto $k = -1$, sia S l'insieme delle soluzioni del sistema. Si dica se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si scrivano: una base di un complemento diretto D di S e una base del complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta S è sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ perché il sistema è omogeneo; $\mathcal{B}_D = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, $\mathcal{B}_{S^\perp} = ((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ (pt.3)**ESERCIZIO 2.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- i valori di k per i quali il vettore $(4, 2, -3)$ è un autovettore di A_k . Si indichi l'autovalore relativo a tale autovettore;

Risposta $k = -1$, $\lambda = 0$ (pt.1)

- i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

Risposta $k \neq 0, 1$ (pt.2)

- posto $k = 3$, una matrice diagonale D simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante P .

Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ (pt.3)**ESERCIZIO 3.** In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + y^2 + kxy - 6x + 4y + 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche di $\mathcal{C}_k$. Si riconosca tale luogo;

Risposta $2x^2 - y^2 - 3x - 2y = 0$, iperbole (pt.3)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (6, 0)$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}_k$;

Risposta $k = 4$ (pt.1)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera.

Risposta $\nexists k$ (pt.1)**ESERCIZIO 4.** Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (2, -1, 1)$ e $B = (0, 1, 2)$. Si determinino delle equazioni cartesiane dei seguenti enti:

- il piano π sul quale giace la retta AB e parallelo all'asse x ;

Risposta $y - 2z + 3 = 0$ (pt.2)

- i piani α e β perpendicolari alla retta AB e distanti 3 da B ;

Risposta $2x - 2y - z + 13 = 0$, $2x - 2y - z - 5 = 0$ (pt.2)

- la sfera passante per i punti A e B e con centro sulla retta AB .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z + 1 = 0$ (pt.2)**ESERCIZIO 5.** In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 2z^2 + 2y = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.**Risposta** Paraboloide ellittico (pt.4)Si riconoscano la sezioni di $\mathcal{Q}$ ottenute con i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x + z = 0$.**Risposta** $\mathcal{Q} \cap \alpha : \text{ellisse}$, $\mathcal{Q} \cap \beta : \text{parabola}$ (pt.2)

$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ 2x - y - kz = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2y + (k-1)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -k & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & (k-1) & 0 \end{array} \right)$$

A B

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 3 \geq \text{rk}(A) \geq 2 \quad \text{sempre}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & (k-1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & (k-1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$-3k^2 + 3k + 6$$

$$k=2 \quad k=-1$$

	$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$	
$k=2, -1$	2	2	∞^1 soluz.
$k \neq 2, -1$	3	3	$\exists!$ soluziune $(0 \ 0 \ 0)$

Se $k \neq -1, 2$ sicuramente $(3, -4, 5)$ NON È SOLUZIONE
ALTRIMENTI IL NS. SISTEMA È EQUIV.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k-1 \end{pmatrix} X = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$9 - 4 - 5 = 0$$

$$3 - 8 + 5(k-1) = 0 \quad 5(k-1) = 5$$

$$\underline{k = 2}$$

$$X = \frac{1}{3}$$

NON SCRIVERE $X = 0,33$!!

$$X = \cancel{0,667} \quad \text{No}$$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I test intermedio - 04/11/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^{3,4}$ con $\dim(U) = 6$, $\dim(W) = 7$. Si determinino minimo e massimo di $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

Risposta $1 \leq \dim(U \cap W) \leq 6$; $7 \leq \dim(U + W) \leq 12$ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si determini, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, se possibile una sequenza di 6 vettori linearmente indipendenti. Si giustifichi la risposta

Risposta Non esiste in quanto $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 < 6$. (pt.1)

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia B la base canonica. Si determini, se esiste, la base B' tale che la matrice $A =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ sia la matrice di cambiamento di base da } B \text{ a } B'.$$

Risposta $B' = ((-1, 2, 3), (0, 1, -2), (1, 1, 2))$ (pt.3)

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di k per i quali A_k è la matrice associata alla forma bilineare $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (data rispetto la base canonica) tale che $(2, 0, 1) \star (0, 1, 3) = 5$.

Risposta -7 (pt.3)

ESERCIZIO 5. Completare, se possibile la sequenza $((1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, -2, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ a base. Giustificare la risposta.

Risposta Non è possibile perché la sequenza è legata (pt.2)

ESERCIZIO 6. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 4 + k \\ (k + 2)x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$.

- Si discuta, al variare del parametro k la compatibilità del sistema e se ne determini il numero di soluzioni.

Risposta Compatibile per $k \neq -5$; ∞^1 soluzioni. (pt.6)

- Posto $k = -2$ si trovi una base ortonormale della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema.

Risposta $B = ((1, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{5}(0, 2, 1))$ (pt.4)

ESERCIZIO 7. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determini per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

Risposta $k \neq 1, 2$ (pt.5)

- Posto $k = -1$ si determini una base B per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per A_k . La base B' di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ortonormalizzando B è composta da autovettori? Giustificare la risposta.

Risposta $B = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (2, 1, 1))$; no, perché la matrice A_{-1} non è simmetrica. (pt.3)

$$\begin{cases} x+y-2z = 4+k \\ (k+2)x-3y+6z = 0 \end{cases}$$

2 eq. in 3 unknowns

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -2 & | & 4+k \\ k+2 & -3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$$

A B

$$\text{rk}(A) \geq 1$$

$$\text{rk}(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \& \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3 - k - 2 = 0$$

$$k = -5$$

	$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$	# sol
$k \neq -5$	2	2	$\infty^{3-2} = \infty^1$
$k = -5$	1	2	0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 2 - z$$

$$y = 3z$$

$$z = z$$

$$S = \{ (2-z, 3z, z) \mid z \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (2, 0, 0) + z(-1, 3, 1) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

S non é v. vettoriale.

Una base di $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}((2, 0, 0), (-1, 3, 1))$

$$\text{é } B = ((1, 0, 0), (1, -3, -1)) \quad |$$