Matrice inversa con Gauss

OSSERVAZIONE:

Sia $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata e

$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ un'altra matrice $n \times n$ di righe $R_1, \dots R_n$

Allora $TA = \begin{pmatrix} t_{11} R_1 + t_{12} R_2 + \cdots + t_{1n} R_n \\ t_{21} R_1 + t_{22} R_2 + \cdots + t_{2n} R_n \\ \vdots \\ t_{n1} R_1 + t_{22} R_2 + \cdots + t_{nn} R_n \end{pmatrix}$

cioè il prodotto a sinistra per T corrisponde a calcolare combinazioni lineari delle righe di A

Calcolo inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sottraiamo dalla $\overline{III}$ riga 2 volte la prima

$$A_1 = T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad T_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sommiamo alla $\overline{III}$ riga di $T_1 A$ la seconda

$$T_2T_1A = \begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&1\\0&0&-3\end{pmatrix} \qquad T_2T_1I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

dividiamo la II riga per 5
e la terza per -3

$$(T_3T_2T_1)A = \begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1/5\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad T_3T_2T_1I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$T_4 = \begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

sommiamo alla I riga
-3 volte la II

$$(T_4T_3T_2T_1)A = \begin{pmatrix}1&0&\frac{7}{5}\\0&1&1/5\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad T_4T_3T_2T_1I = \begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&0\\0&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$T_5 = \begin{pmatrix}1&0&-\frac{7}{5}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

sommiamo alla I riga
$-\frac{7}{5}$ della terza

$$(T_5T_4T_3T_2T_1)A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{5}\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad (T_5T_4T_3T_2T_1)I = \begin{pmatrix}\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}&\frac{7}{15}\\0&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$T_6 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{1}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

sommiamo $-\frac{1}{5}$ la III
riga alla seconda

$$T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

questa é l'inversa di A

PROCEDURA: Si eseguono operazioni di riga su A e contemporaneamente su I per arrivare a portare la matrice nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'esito delle operazioni su I dá l'inversa di A