prodotto scalare su di uno spazio vettoriale.

$\Downarrow$

forma bilineare $\qquad V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$\to$ ~~ur~~ prodotto scalare definito positivo $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall\, \bar{x} \in V : \quad \bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \quad e \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff x = \underline{0}$$

Def: Uno spazio vettoriale reale dotato di prod. scalare definito positivo è detto spazio euclideo. e lo indicheremo come

$$V^{\circ}(\mathbb{R})$$

$\to$ In uno spazio euclideo si definisce $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{q(\bar{x})}$

Uno spazio euclideo è uno spazio metrico con distanza data da $d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x}-\bar{y}\|$.

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE

1) $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

$$\|\bar{x}-\bar{y}\|^2 = (\bar{x}-\bar{y})\cdot(\bar{x}-\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{y}\cdot\bar{y} - 2\bar{x}\cdot\bar{y} =$$
$$= (\bar{y}-\bar{x})\cdot(\bar{y}-\bar{x}).$$

2) $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ in quanto $\|\bar{x}-\bar{y}\| \geq 0$

e $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\bar{x}-\bar{y}\| = 0 \Leftrightarrow$

$: \bar{x} = \bar{y}$

DA DIMOSTRARE $\rightarrow$

3) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}) \quad \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in V^{\circ}$

$$\|\bar{x}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-z\| + \|\bar{y}-\bar{z}\|$$

Teorema: Valgono in $V^0(\mathbb{R})$ le seguenti 2 disuguaglianze.

1) Cauchy-Schwartz: $\forall\, \bar{x}, \bar{y}$:

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \qquad \frac{|\bar{x}\cdot\bar{y}|}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} \leq 1$$

minore o uguale.

2) DISUG. TRIANGOLARE

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

DIM: $\bar{x} = \underline{0}$ o $\bar{y} = \underline{0} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| = 0 \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = 0 \qquad \text{ok}$$

supponiamo che $\bar{x} \neq \underline{0}$, $\bar{y} \neq \underline{0}$

usiamo il fatto che il prod. scalare é

definito positivo. $\Rightarrow$ 3)

$$(\bar{x}+\alpha\bar{y})\cdot(\bar{x}+\alpha\bar{y})\geq 0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

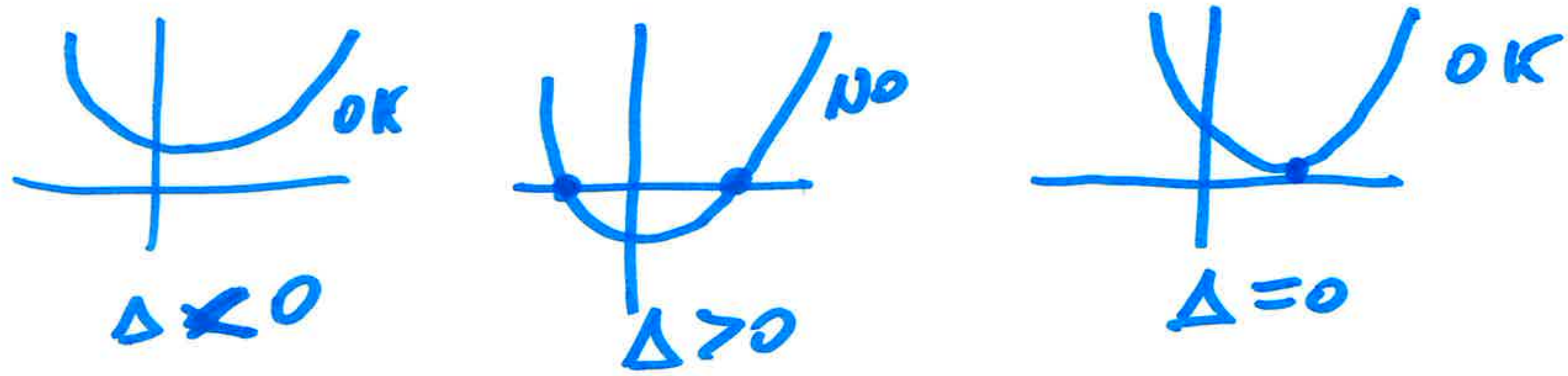
$$(*) \quad \alpha^2\underbrace{(\bar{y}\cdot\bar{y})}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{2}\alpha\underbrace{(\bar{x}\cdot\bar{y})}_{\in\mathbb{R}}+\bar{x}\cdot\bar{x}\geq 0 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

funzione di II grado di variabile reale α
a valori in $\mathbb{R}$.

(*) é sempre positivo (non cambia di segno)
(non negativo).

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \rightarrow$ l'eq. di II grado

$$\alpha^2(\bar{y}\cdot\bar{y})+2\alpha(\bar{x}\cdot\bar{y})+\bar{x}\cdot\bar{x}=0$$



$$\frac{\Delta}{4} = (\bar{x}\cdot\bar{y})^2 - (\bar{y}\cdot\bar{y})(\bar{x}\cdot\bar{x}) \le 0$$

$$\Rightarrow (\bar{x}\cdot\bar{y})^2 \le \|\bar{y}\|^2\cdot\|\bar{x}\|^2$$

$\Rightarrow$ estraendo le radici quadrate

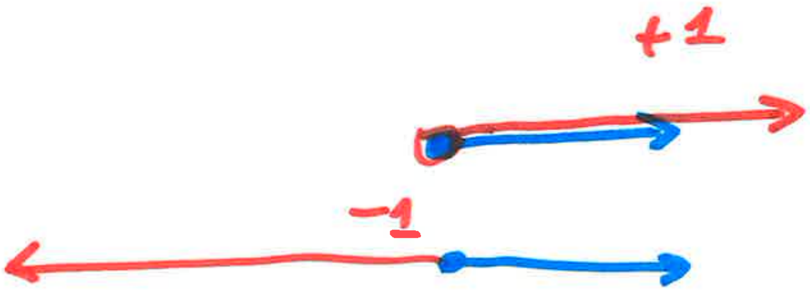
$$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| \qquad \square$$

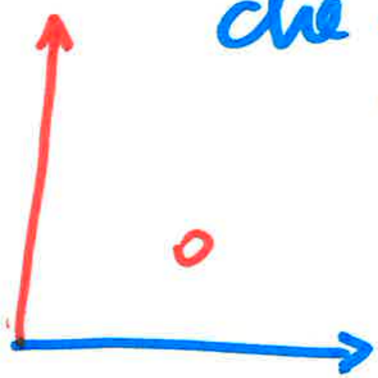
Si definisce come coseno dell'angolo fra $\bar{x}$ e $\bar{y}$ il valore

$$-1 \le \frac{(\bar{x}\cdot\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} \le +1$$

se $\bar{x} = \alpha\bar{y} \Rightarrow \dfrac{(\bar{x}\cdot\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} = \dfrac{\alpha(\bar{y}\cdot\bar{y})}{|\alpha|\,\|\bar{y}\|^2} =$

$= \pm 1$ a seconda che sia $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$





2) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{x} + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{y} = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} \le$

$$\|x\|^2+\|\bar{y}\|^2+2|\bar{x}\cdot\bar{y}| \underset{C/S}{\leq} \|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2+2\|x\|\cdot\|y\| =$$ c)

$$= \left(\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|\right)^2$$

estraendo la radice quadrata

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\| \qquad \square$$

→ conseguenza: la norma definisce una distanza su $V^\circ(\mathbb{R})$.

spazi

Spazi di Hilbert	Spazi di Banach	Spazi Metrici
Sp. dotato di un prod. scalare def. pos. [e completo rispetto la topologia indotta]	Sp. dotati di norma	Sp. dotato di distanza

$\longrightarrow$ $\longrightarrow$

N.B Non tutte le distanze sono indotte da prodotti scalari.

Esempio: $\mathbb{K}^n$ sp. vettoriale delle n-uple a coeff. in $\mathbb{K}$.

$$d_H : \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \longmapsto |\{i \mid x_i \neq y_i\}| \end{cases}$$

d_H ci dice in quante posizioni i vettori $\bar{x} = (x_1 — x_n)$
$\bar{y} = (y_1 — y_n)$
differiscono.

d_H è una distanza detta distanza di Hamming.

g)

Siano $\bar{x} = (x_1 \text{ — } x_n)$

$\bar{y} = (y_1 \text{ — } y_n)$ tre vettori.

$\bar{z} = (z_1 \text{ — } z_n)$

$$d_n(\bar{x},\bar{y}) \leq d_n(\bar{x},\bar{z}) + d_n(\bar{z},\bar{y})$$

$$|\{i \mid x_i \neq y_i\}| = |\{i \mid x_i = z_i \;\&\; y_i \neq z_i\}| +$$

$$+\, |\{i \mid x_i \neq z_i \text{ e } z_i = y_i\}|$$

$$\leq |\{i \mid y_i \neq z_i\}| + |\{i \mid x_i \neq z_i\}|$$

$$= d_n(\bar{y},\bar{z}) + d(\bar{x},\bar{z}) \qquad \square$$

Def: Una sequenza di vettori di $V^0(\mathbb{R})$ è detta <u>ortonormale</u> se

$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n \dots)$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

esempio: in $\mathbb{R}^2$ con prod. scalare dato da $(\bar{x}, \bar{y}) \to {}^t\bar{x} I \bar{y}$ (prod. scalare standard).

$$((1\ 0), (0\ 1))$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

Teorema: Ogni sequenza ortonormale è "libera".

DIM: Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K)$ una seq. ortonormale di vettori di $V^0(\mathbb{R})$.

Supponiamo $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_K$ tali che

$$\underline{0} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_K \bar{e}_K$$

$\forall\, i \in 1 \dots K$ consideriamo

$$0 = \bar{e}_i \cdot \underline{0} = \bar{e}_i \cdot (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_K \bar{e}_K) =$$

$$\alpha_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_i) + \alpha_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_i) + \dots + \alpha_K (\bar{e}_K \cdot \bar{e}_i) =$$

$$= \sum_j \alpha_j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = \alpha_i$$

ogni coeff. α_i deve essere nullo

$\Rightarrow$ SEQUENZA LIBERA. $\square$

1) | É sempre possibile data una seq. di generatori costruire una seq. ortonormale che genera il medesimo spazio vettoriale. |

2) Se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ é una base di $V^o(\mathbb{R})$ ortonormale e $\bar{v} \in V^o(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ ha componenti

$$\alpha_i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$$

In $\mathbb{R}^3$ rispetto prod. scalare std.

$$\mathcal{B} = \left((1\,0\,0),\ \left(0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(0,\ \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

$$\bar{v} = (1, 2, 3) = \alpha_1 (1\,0\,0) + \alpha_2 \left(0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \alpha_3 \left(0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha_1 = (1\,2\,3) \cdot (1\,0\,0) = 1$$

$$\alpha_2 = \left(0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (1\,2\,3) = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_3 = (1\,2\,3) \cdot \left(0\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

DIM di OSS: Sia A la matrice del prodotto scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e A' la matrice rispetto $\mathcal{B}'$.

$$A' = {}^tPAP$$

ma se la base $\mathcal{B}$ è ortonormale $\Rightarrow A = I_n$ e $A' = I_n$ perché anche $\mathcal{B}'$ è ortonormale

$$\Rightarrow I = {}^tPP \Rightarrow {}^tP = P^{-1}$$

II osservazione ${}^tPP$ corrisponde alla matrice

DIM di 2)

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{v} = \bar{e}_i \cdot (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = \alpha_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) = \alpha_i \qquad \square$$

<u>OSS</u>: Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi ortonormali $\Rightarrow$ la matrice P di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è una matrice ortogonale, cioè

$$P^{-1} = {}^tP$$

ovvero le righe/colonne di P formano un sistema <u>ortonormale</u>

che ha come entrata i,j il prodotto scal."
della i-esima riga di ${}^tP$ (= i esima colonna di P) per la j-esima colonna di P

$\Rightarrow$ è ~~propr~~ $= 1$ se $i = j$; $= 0$ se $i \neq j$

e dunque le colonne di P sono un sistema ortonormale di $\mathbb{K}^n$.

poiché ${}^tP$ gode delle stesse proprietà anche le righe di P sono un sistema ortonormale.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ é ortogonale? **NO**

$${}^{t}P\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

$$P' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$ é ortogonale!

COME COSTRUIRE SISTEMI ORTOGONALI?

DIAMO UN ALGORITMO
GRAM-SCHMIDT (G/S)

→ INPUT (sequenza di vettori - libera).

→ OUTPUT seq. di vettori ortonormale che genera il medesimo spazio vettoriale.

$$S = (\bar{e}_1 \, \bar{e}_2 \, \dots \, \bar{e}_n)$$

$$\bar{e}_1' \leftarrow \frac{1}{\|\bar{e}_1\|} \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_2^{\circ} \leftarrow \bar{e}_2 - (\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2) \, \bar{e}_1' = \bar{e}_{2\perp}$$

$$\bar{e}_2' \leftarrow \frac{1}{\|\bar{e}_2^{\circ}\|} \bar{e}_2^{\circ}$$

$$\bar{e}_3^{\circ} \leftarrow \bar{e}_3 - (\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_1' - (\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_2'$$

$$\bar{e}_3' \leftarrow \frac{1}{\|\bar{e}_3^{\circ}\|}\bar{e}_3^{\circ}$$

$$\vdots$$

$$\bar{e}_i^{\circ} \leftarrow \bar{e}_i - \sum_{j<i} (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j')\bar{e}_j'$$

$$\bar{e}_i' \leftarrow \frac{1}{\|\bar{e}_i^{\circ}\|}\bar{e}_i^{\circ}$$

Innanzi tutto: 1) ogni $\bar{e}_i'$ è di norma 1

2) $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j' = 0$ se $j \neq i$

supponiamo $j<i$

$$\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j = \frac{1}{\|\bar{e}^\circ_i\|}(\bar{e}^\circ_i , \bar{e}'_j) =$$

$$= \frac{1}{\|\bar{e}^\circ_i\|}\Big(\bar{e}_i - \sum_{k<i}(\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_k)\bar{e}'_k\Big) \cdot \bar{e}'_j =$$

$$= \frac{1}{\|\bar{e}^\circ_i\|}\Big(\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j - (\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j)\underbrace{(\bar{e}'_j \cdot \bar{e}'_j)}_{=1}\Big) = 0$$

$$\Big(\sum_{k<i}(\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_k)e'_k\Big) \cdot \bar{e}'_j = \sum_k (\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_k)(\bar{e}'_k \cdot \bar{e}'_j) =$$

$$= (\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j)$$

$\square$

G/S dipende dall'ordine in cui si fornisce la seq. in input.

$$\underset{\bar{e}_1}{(1\ 0\ 0)} \quad \underset{\bar{e}_2}{(0\ 1\ 0)} \quad \underset{\bar{e}_3}{(1\ 2\ 3)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(1\ 0\ 0) \quad (0\ 1\ 0)$$

$$\bar{e}_3^{\circ} = (1\,2\,3) - (1\,2\,3)\cdot(1\,0\,0)\,(1\,0\,0) - (1\,2\,3)\cdot(0\,1\,0)\cdot(0\,1\,0)$$

$$= (0\ 0\ 3)$$

$$\bar{e}_3' = (0\ 0\ 1)$$

$(1\,2\,3) \quad (1\,0\,0) \quad (0\,1\,0)$

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{15}}(1\,2\,3)$$

$$e_2^\circ = (1\,0\,0) - \frac{1}{\sqrt{15}}(1\,2\,3)\cdot(1\,0\,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}(1\,2\,3)$$

$$= (1\,0\,0) - \frac{1}{15}(1\,2\,3) = \left(\frac{14}{15}\ \ -\frac{2}{15}\ \ -\frac{3}{15}\right)$$

$$\bar{e}_2' = \bar{e}_2^\circ \cdot \frac{1}{\|\bar{e}_2^\circ\|}$$

ATTENZIONE: se si usa G/S e si può scegliere l'ordine dei vettori:

mettere all'inizio quelli "più semplici"!

ORTOGONALITÁ IN $V^\circ(\mathbb{R})$

Sia $\bar{x} \in V^\circ(\mathbb{R})$ definiamo

$$\bar{x}^\perp := \{ \bar{y} \in V^\circ(\mathbb{R}) \mid \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \}.$$

$\bar{x}$ perp

$\bar{x}$ ortogonale

Se $X \subseteq V^\circ(\mathbb{R})$ poniamo

$$X^\perp = \{ \bar{y} \in V^\circ(\mathbb{R}) \mid \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall x \in X \}.$$

<u>OSS</u>: $X^\perp$ é sempre un sottospazio vettoriale di $V^\circ(\mathbb{R})$

infatti $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall$ ~~$\bar{x}$~~ $\bar{u}, \bar{v} \in X^\perp$.

$$\forall \bar{x} \in X : (\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) \cdot \bar{x} = \alpha(\bar{u} \cdot \bar{x}) + \beta(\bar{v} \cdot \bar{x})$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\square$

Il complemento ortogonale di un insieme é sempre un sottospazio

$X = \{(2\,1\,0\,0), \ (3\,1\,1\,0) \ \ (1\,1\,0\,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

es

$$X^{\perp} = \left\{ (x,y,z,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} (2100)\cdot(xyzt) = 0 \\ (3110)\cdot(xyzt) = 0 \\ (1101)\cdot(xyzt) = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x\,y\,z\,t) \;\middle|\; \begin{cases} 2x+y = 0 \\ 3x+y+z = 0 \\ x+y+t = 0 \end{cases} \right\}.$$

$X^{\perp}$ é esattamente l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo in cui la matrice incompleta contiene come righe i vettori di X.

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$S = \left((1\ 2\ 0\ 1), (1\ -1\ 1\ 0) \right)^{\perp}$$

$X^{\perp}$ "sappiamo" come costruirlo.

In particolare se $Y \subseteq X$ è un sistema di generatori per $\mathcal{L}(X)$ noi abbiamo

$Y^{\perp} = \mathcal{L}(Y)^{\perp} = \mathcal{L}(X)^{\perp} = X^{\perp} \Rightarrow$ ci teniamo solo le eq. indipendenti.

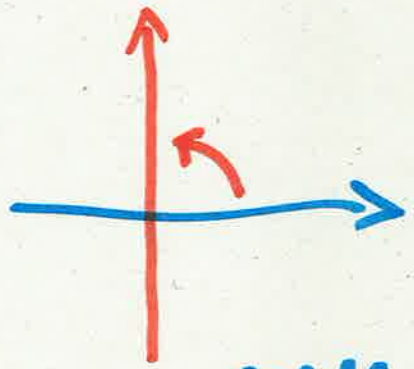
Teorema: 1) Se $X \subseteq Y \Rightarrow Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$

2) $X^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale.

3) $X^{\perp\perp} \supseteq X$

4) In $V_n^0(\mathbb{R})$ $\mathcal{L}(X) \oplus X^{\perp} = V_n^0$

cioè $X^{\perp}$ è un complemento diretto di $\mathcal{L}(X)$.



DIM 1) $Y^{\perp} = \{\bar{z} \mid \bar{z} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{y} \in Y\}$

$\subseteq \{\bar{z} \mid \bar{z} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{y} \in Y \cap X = X\} = X$

$= X^{\perp}$

2) Già fatta.

3) vediamo che $X \subseteq X^{\perp\perp}$

e quindi $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$

in quanto $X^{\perp\perp} = (X^{\perp})^{\perp}$

è spazio vettoriale per (2).

~~Ora~~ $X^{\perp} = \{ \bar{y} \mid \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{x} \in X \}$

$X^{\perp\perp} = \{ \bar{z} \mid \bar{z} \cdot \bar{y} = 0 \ \forall \bar{y} \in X^{\perp} \}$

ma allora $\bar{z} = \bar{x} \in X$ è anche in

$X^{\perp\perp}$ perché $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$

4) Se il prod. scalare é def. positivo

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \oplus X^{\perp} = V_n^o(\mathbb{R}).$$

Innanzi tutto mostriamo che

$$\mathcal{L}(X) \oplus X^{\perp}$$

ci sono 2 sp. vett.

verifichiamo $\mathcal{L}(X) \cap X^{\perp} = \{\underline{0}\}$.

Sia $\bar{z} \in \mathcal{L}(X) \cap X^{\perp} \Rightarrow$

$$\bar{z} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_r \bar{v}_r \quad \text{per } \bar{v}_i \in X$$

e $\bar{z} \cdot \bar{x} = 0 \quad \forall \bar{x} \in X$

ma allora

$$\bar{z} \cdot (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_t \bar{v}_t) = 0$$

da cui $\bar{z} \cdot \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z} = \underline{0}$

poiché il prod. scalare è definito positivo.

Quindi $\mathcal{L}(X) \oplus X^\perp$ e in particolare

se $\dim V_n^\circ(\mathbb{R}) = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim X^\perp \leq n - \dim \mathcal{L}(X).$$

Facciamo ora vedere che $\dim X^\perp$ è proprio uguale a $n - \dim \mathcal{L}(X)$.

$\Rightarrow$ per Graßmann

$$\dim X^\perp + \dim \mathcal{L}(X) = n$$

$= \dim(X^\perp \oplus \mathcal{L}(X))$ e quindi

$X^\perp \oplus \mathcal{L}(X)$ è uguale a V_n^0.

i). prendiamo $\mathcal{L}(X)$ e sia $\mathcal{B}_1$ una una base $\to$ con G/S costruiamo $\widetilde{\mathcal{B}_1}$ base ortonormale di $\mathcal{L}(X)$.

ii) completiamo $\widetilde{\mathcal{B}_1}$ a base di V_n^0 aggiungendo dei vettori $(n - \dim \mathcal{L}(X))$ che sono in $V_n^0 \longrightarrow \mathcal{B}_2$

$\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \mathcal{B}_2$

é base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$

$\dim \mathcal{L}(X)$

iii) Applichiamo G/S a $\boxed{\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \mathcal{B}_2}$

→ otteniamo una base ortonormale di V_n° del tipo $\boxed{\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_3}$

NON É DETTO CHE $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}}_3) = \mathcal{L}(\mathcal{B}_2)$

IN GENERALE É FALSO!!

É VERO CHE $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}}_1)$

$\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_3)$

é però vero che

$$|\mathcal{B}_2| = |\widetilde{\mathcal{B}}_3| = n - \dim \mathcal{L}(X)$$

poniamo $\mathcal{Y} = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}}_3)$

$\dim \mathcal{Y} = n - \dim \mathcal{L}(X)$ <u>OK</u>

$\mathcal{Y} \oplus \mathcal{L}(X)$ <u>OK</u>

quindi $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{L}(X) = V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ <u>OK</u>

MOSTRIAMO CHE $\mathcal{Y} \subseteq X^{\perp}$ e dunque

$$\mathcal{Y} = X^{\perp}$$

INFATTI ABBIAMO CHE i VETTORI DI

$\tilde{\mathcal{B}}_3$ sono ortogonali ai vettori di $\tilde{\mathcal{B}}_2$ cioé sono ortogonali ai vettori di una base di $\mathcal{L}(X)$. e dunque sono ortogonali a $\mathcal{L}(X)$.

$$\tilde{\mathcal{B}}_3 \subseteq \mathcal{L}(X)^{\perp} = X^{\perp}$$

MA DA QUESTO, poiché $X^{\perp}$ é sottospazio $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}}_3) \subseteq X^{\perp} \Rightarrow$

$$Y \subseteq X^{\perp}$$

e per le dimensioni deve essere

$$Y = X^{\perp}.$$

□

COROLLARIO

Sia $X \leq V_n^{\circ}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X^{\perp\perp} = X$$

infatti $\dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^{\perp} =$

$$= n - (n - \dim X) =$$

$$= \dim X \quad \square$$

ed $X \subseteq X^{\perp\perp}$

Esercizio: Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

calcolare $S^{\perp}$ ove S = insieme delle*
soluzioni del
sistema.

$$S^{\perp} = \mathcal{L}((1\ 2\ -3\ 4), (1\ 2\ 0\ 0), (2\ 1\ -1\ 0))$$

perché $S = ((1\ 2\ -3\ 4)\ (1\ 2\ 0\ 0)\ (2\ 1\ -1\ 0))^{\perp}$

$S^{\perp\perp}$ é lo s. vett. generato dai 3
vettori.

per intenderci se X é un insieme di
eq. omogenee $X^{\perp}$ é l'insieme delle soluz.
se Y é un sott. vettoriale $\Rightarrow Y^{\perp}$ é il

sottospazio delle equazioni che definiscono
y

$$W = \mathcal{L}((1200),(0110))$$

TROVARE EQ. CHE DEFINISCONO
W come sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}x\\ y\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}z\\ t\end{matrix}\end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

calcolare $W^\perp$

$$\begin{cases} (1\,2\,0\,0)\cdot(\underline{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}) = 0 \\ (0\,1\,1\,0)\cdot(\underline{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2a_2 \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = -a_2 \\ a_4 = a_4 \end{cases}$$

$$W^\perp = \mathcal{L}\left((-2\;1\;-1\;0),\ (0\;0\;0\;1)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

<u>Oss</u>: la teoria vista per i prodotti scalari oggi ci consente anche di dare una nuova dimostrazione del fatto che il sistema omogeneo

$$AX = \underline{0}$$

ha come soluzioni uno sp. vettoriale di dim $n - rk(A)$

2°

DIM S, l'insieme delle soluzioni è

$R^{\perp} = S$ ove $R =$ insieme delle righe di A

Ma $\dim \mathcal{L}(R) = rk(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim S = \dim R^{\perp} = n - rk(A)$

$\square$

$$
\begin{array}{cc}
 & 4 \\
4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Autovalori solo 1 e 2 e nessun altro.

<u>OSS</u> RK della matrice diagonale coincide con il RK della matrice di partenza.

perché moltiplicare per una matrice invertibile non cambia il rango.

⇒ Il rango di una matrice diag. é dato dal numero di entrate $\neq 0$ sulla diagonale.

⇒ se il rango di una matrice diag é $< n$ dell'ordine

⇒ ci deve essere 0 come autovalore.

n2

ricordiamoci che il det. della matrice diag e quello della matrice di partenza coincidono

$A \in \mathbb{K}^{4,4}$

$rk(A) = 3$

$\Rightarrow \det(A) = 0$

$\Rightarrow \det(A - 0I) = 0$

$\Rightarrow 0$ autovalore.

~~Si scriva una matrice diagonalizz~~
~~con autovalori 1 di molt. alg. 2, 2 di~~
~~molteplicità~~

Esiste una matrice 4×4 con rango 2 e autovalori almeno 1, 2 e 3? Se sì scriverla / se no giustificare la risposta.

La matrice deve avere anche l'autovalore 0 perché ha $rk = 2$.

$AX = \underline{0}$ è un sistema lineare con ∞^2 soluzioni $\Rightarrow$

$$g_0 = \cancel{\dim \ker A} \; n - rk(A - 0I) = 4 - 2 = 2$$

$g_1 \geq 1 \quad g_2 \geq 1 \quad g_3 \geq 1 \quad g_0 = 2$

$\sum g_i = 5 > 4$ ASSURDO!

Quindi una matrice di questo tipo non può esistere.

$(n - RK\,A) =$ molteplicità geometrica di 0 come autoval.

$n - Rk(A) =$ dim spazio soluzioni $AX = \underline{0}$ che è lo stesso di $(A - 0I)X = \underline{0}$

E1. MATRICE $^{3\times 3}$ DIAG. MA NON DIAGONALE

CON AUTOVALORI 1 di molt. geom 2

e 2 di mol. geom 1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e calcolare $A = PDP^{-1}$

${}^tP'DP'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} -$$

$$\operatorname{rk}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_1 = 3 - 1 = 2$$