

Scrivere un sistema lineare in 3 eq. e 4 incognite non compatibile.

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+z+t=2 \\ x+y=0 \end{cases} \parallel$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somma di sottospazi vettoriali / dimensioni di intersezione e somma.

Def. 1) Sia $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ una eq. lineare omogenea in n incognite

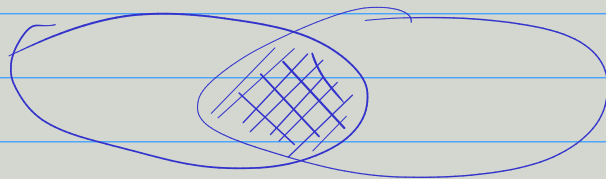
$$\Rightarrow V_S = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \}$$

è un sottospazio vett. di $\mathbb{K}^n$

2) l'intersezione di 2 sottospazi di $V(k)$ è ancora un sottospazio di $V(k)$.

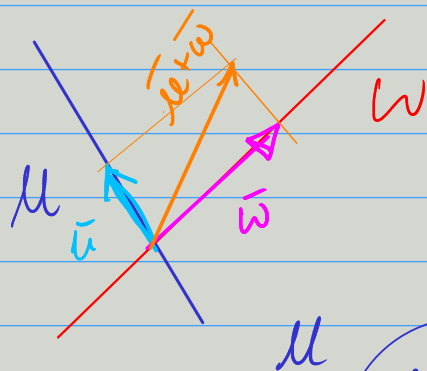
1)+2) $\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $W = \{ \vec{v} \in k^n \mid A \vec{v} = \underline{0} \}$ è un sottospazio di k^n

|| Se due oggetti X, Y godono di una proprietà è molto probabile che $X \cap Y$ goda ancora di quella proprietà.

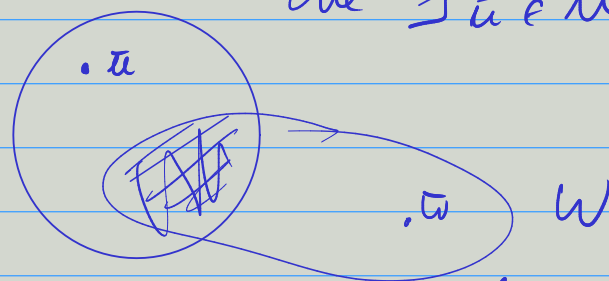


In generale questo non è vero per l'unione.

oss. Siano $U, W \subseteq V(K) \Rightarrow U \cup W$ è sottospazio di $V(K) \Leftrightarrow U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$
 ed in tale caso $U \cup W \in \{U, W\}$.



Dim: Supponiamo per assurdo
 $U \cup W$ sottospazio e
 che $\exists u \in U \setminus W, w \in W \setminus U$



Se $U \cup W$ fosse sottospazio $u+w \in U \cup W$ ma
 questo significa $u+w \in U$ oppure $u+w \in W$
 se fosse $u+w \in U \Rightarrow u+w \in U, u \in U \Rightarrow$
 $u+w-u=w \in U \text{ (c)} \Rightarrow u+w \notin U$

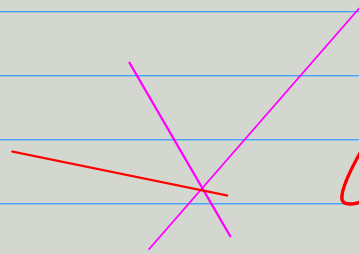
similmente si ha che $\bar{u} + \bar{w} \notin W \rightarrow U \cup W$ non è sottospazio. $\square$

In generale vorremmo poter costruire sottospazi più grandi a partire da sottospazi dati

CONSIDERIAMO $\mathcal{L}(U \cup W)$

$$\{0\} \subseteq U \cap W \subseteq \mathcal{L}(U \cup W) \subseteq \mathcal{L}(U \cup W) \subseteq V(K)$$

↑
più piccolo sottospazio
che contiene $U \cup W$



Come caratterizzare $\mathcal{L}(U \cup W)$?

→ Somma di sottospazi vettoriali

Siano $U, W \subseteq V(K)$

Definiamo

$$U + W := \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \}$$

1) $U \subseteq U+W$ in quanto $\forall \bar{u} \in U \quad \bar{u} + \underline{0} \in U+W$ $\nearrow \in W$
 $W \subseteq U+W$ in quanto $\forall \bar{w} \in W \quad \underline{0} + \bar{w} \in U+W$

2) $U+W \subseteq \underline{L}(U \cup W)$ perché se X è un sottospazio vettoriale di $V(K)$ con $U, W \subseteq X \Rightarrow$ necessariamente $\bar{u} + \bar{w} \in X \quad \forall \bar{u} \in U, \forall \bar{w} \in W$

Teorema. $U+W$ è sottospazio di $V(K)$ [e dunque per (1)+(2) $U+W$ è il più piccolo sottospazio che contiene U e $W \Rightarrow U+W = \underline{L}(U \cup W)$]

Dim: Ci basta verificare le proprietà di chiusura.

$\rightarrow$ Sia $\bar{x}, \bar{y} \in U+W, \alpha, \beta \in K$

Allora $\exists \bar{u}, \bar{u}' \in U, \bar{w}, \bar{w}' \in W; \bar{x} = \bar{u} + \bar{w}, \bar{y} = \bar{u}' + \bar{w}'$

$$\Rightarrow \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = \alpha(\bar{u} + \bar{w}) + \beta(\bar{u}' + \bar{w}') = (\alpha\bar{u} + \beta\bar{u}') + (\alpha\bar{w} + \beta\bar{w}') \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$$

$\in \mathcal{U} \qquad \qquad \qquad \in \mathcal{W}$

Teorema A

Sia $G_{\mathcal{U}}$ un insieme di generatori di $\mathcal{U}$

e $G_{\mathcal{W}}$ un insieme di generatori di $\mathcal{W}$

$\Rightarrow G_{\mathcal{U}} \cup G_{\mathcal{W}}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{U} + \mathcal{W}$

DIM:

Sia $\bar{u} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{u}$ è c. lineare di un numero finito t di vettori di $G_{\mathcal{U}}$

$\bar{w} \in \mathcal{W} \Rightarrow \bar{w}$ è comb. lineare di un numero finito k di vettori di $G_{\mathcal{W}}$

$\bar{u} + \bar{w} \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$ è comb. lineare di al più $t+k < \infty$ vettori di $G_{\mathcal{U}} \cup G_{\mathcal{W}}$

Esempio

$$U = \mathcal{L}(\underline{(1\ 0\ 0)}, \underline{(0\ 1\ 1)}) \quad W = \mathcal{L}(\underline{(2\ 0\ 0)}, \underline{(0\ 1\ -1)})$$

$$G_U \cup G_W = (\underline{(1\ 0\ 0)}, (0\ 1\ 1), \underline{(2\ 0\ 0)}, (0\ 1\ -1))$$

$$\bar{u} = \alpha(1\ 0\ 0) + \beta(0\ 1\ 1)$$

$$\bar{w} = \alpha'(2\ 0\ 0) + \beta'(0\ 1\ -1)$$

$$\bar{u} + \bar{w} = \alpha(1\ 0\ 0) + \beta(0\ 1\ 1) + \alpha'(2\ 0\ 0) + \beta'(0\ 1\ -1) =$$

$$= (\alpha + 2\alpha')(1\ 0\ 0) + \beta(0\ 1\ 1) + \beta'(0\ 1\ -1)$$

$$G_U \cup G_W$$

OSSERVAZIONE: Anche se G_U e G_W sono sequenze libere
non è detto che $G_U \cup G_W$ sia libera!!

| L'unione di una base di U con una base di
 W non è necessariamente una base di $U+W$

Sia $\dim(U) = m$, $\dim(W) = n$

$\Rightarrow U$ ammette una seq di m generatori

W ammette una seq. di n generatori

$U \cup W$ ammette una seq. di $m+n$ generatori.

$\rightarrow \boxed{\dim(U+W) \leq \dim(U) + \dim(W)}$

Quanto vale

$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W)$?

Risposta:

$\dim(U \cap W)$ [formula di Grassmann]

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Quando è diverso $U+W$ da $U \times W$

Quando $\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)}$

Def: Siano $U, W \subseteq V(K)$. Si dice che la somma

$U+W$ è diretta e si scrive $U \oplus W$

se ogni vettore $\bar{s}$ di $U+W$ si può scrivere

in modo unico come $\bar{s} = \bar{u} + \bar{w}$ con $\bar{u} \in U$,
 $\bar{w} \in W$.

→ In simboli // $U \oplus W \Leftrightarrow \forall \bar{s} \in U+W \exists! \bar{u} \in U \exists! \bar{w} \in W$ tali
che $\bar{s} = \bar{u} + \bar{w}$

In altri simboli, la funzione
 $\pi: \begin{cases} U \times W \rightarrow U \oplus W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \rightarrow \bar{u} + \bar{w} \end{cases}$ è iniettiva

(e perché è ovviamente suriettiva e lineare)
è un isomorfismo. $U \times W$ è spazio vettoriale

$$\begin{aligned}
 \pi(\alpha(\bar{u}, \bar{w}) + \beta(\bar{u}', \bar{w}')) &= \alpha\bar{u} + \alpha\bar{w} + \beta\bar{u}' + \beta\bar{w}' = \\
 &= \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}' + \alpha\bar{w} + \beta\bar{w}' = \\
 &= \pi(\alpha(\bar{u}, \bar{w}) + \beta(\bar{u}', \bar{w}'))
 \end{aligned}$$

Teorema: Si dno $U, W \subseteq V(K)$ e supponiamo $S = U \oplus W$.

Allora posto $B_U = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ base di U

$B_W = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ base di W

$B_U \cup B_W$ è una base di $U \oplus W$.

→ in particolare

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

Dim: Ogni vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico come $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ con $\bar{u}$ in U e $\bar{w}$ in W ma $\bar{u}$ si scrive in modo unico come c. Lineare

dei vettori di B_v e $\bar{w}$ come c. lineare dei vettori di $B_w \Rightarrow \bar{v}$ si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di $B_v \cup B_w$. 1

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}_m + \beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_n \bar{w}_n = \\ &= \alpha'_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha'_m \bar{u}_m + \beta'_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta'_n \bar{w}_n \end{aligned}$$

poiché la somma è diretta deve essere

$$\begin{cases} \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}_m = \alpha'_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha'_m \bar{u}_m \\ \beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_n \bar{w}_n = \beta'_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta'_n \bar{w}_n \end{cases}$$

$$\text{ma } (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m) \text{ base di } U \Rightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_m) = (\alpha'_1 \dots \alpha'_m)$$

$$(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) \text{ base di } W \Rightarrow (\beta_1 \dots \beta_n) = (\beta'_1 \dots \beta'_n)$$

□

Incidentalment e

$$\dim(U \times W) = \dim(U \oplus W) = m+n$$

Teorema: Siano $U, W \leq V(K)$. Allora $U \oplus W$ se e
soltamente se $U \cap W = \{\underline{0}\}$
($\dim \{\underline{0}\} = 0$)

DIM $U \oplus W \Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$

supponiamo $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \in U + W$ ed $\bar{x} \in U \cap W$

$$\Rightarrow v = \bar{u} + \bar{w} = (\underbrace{\bar{u} + \bar{x}}_{\in U}) + (\underbrace{\bar{w} - \bar{x}}_{\in W})$$

per def di somma diretta deve essere

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u} + \bar{x} \\ \bar{w} = \bar{w} - \bar{x} \end{cases} \rightarrow \underline{\bar{x} = 0}$$

$$U \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow U \oplus W$$

supponiamo per assurdo $U \cap W = \{0\}$ e che $U+W$ non
sia diretta

$\Rightarrow \exists \bar{v} \in U+W$ con

$$\bar{v} = \boxed{\bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2}$$

con $(\bar{u}_1, \bar{w}_1) \neq (\bar{u}_2, \bar{w}_2)$

$$\begin{array}{ccc} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 & \in U \cap W = \{0\}, \\ \in U & \in W \end{array}$$

per ipotesi $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \neq 0$ $\downarrow$

$\Rightarrow$ la somma $U+W$ è diretta □

NB Se $U \oplus W \Rightarrow \boxed{\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$

principio di inclusione/esclusione.

Sei A, B due insiemini $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

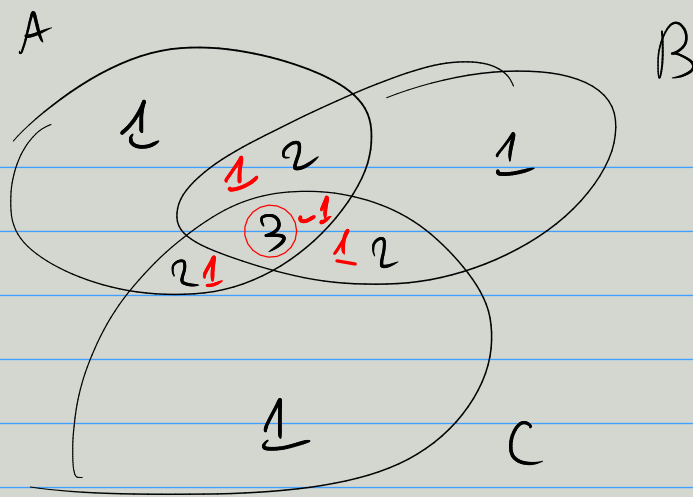


$$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

$$\begin{aligned} \text{ma } \left. \begin{aligned} |A| &= |A \setminus B| + |A \cap B| \\ |B| &= |B \setminus A| + |A \cap B| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |A| + |B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = \\ &= |A \cup B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

da cui la formula.



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$

$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

$$+ |A \cap B \cap C|$$

Teorema (formula di Grassmann)

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Dim Siano U, W due sottospazi di $V(K)$ con

$$\dim U = p, \dim W = q$$

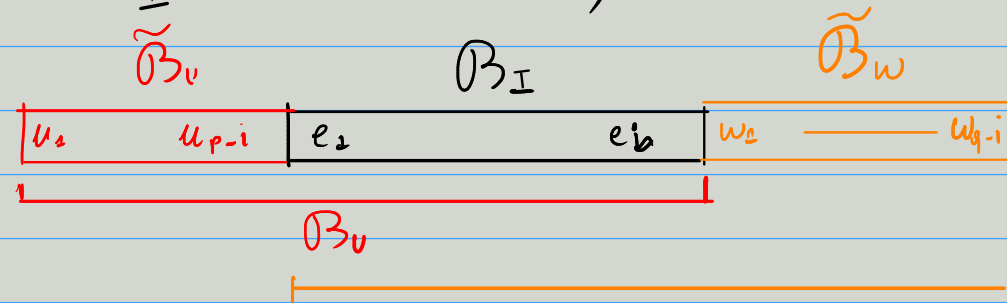
$$\text{poniamo } i = \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U + W) = p + q - i$$

→ Se $i=0$ $\Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow U \oplus W \Rightarrow \dim U \oplus W = \dim U + \dim W$

→ Supponiamo dunque $I = U \cap W$ $\dim(I) = i > 0$

La $B_I = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ una base di I



$B_I \subseteq U \rightarrow$ completo B_I a base B_U di U $\rightarrow p+q-i$ vettori

aggiungendo $\tilde{B}_U = \{\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{p-i}\}$ vettori

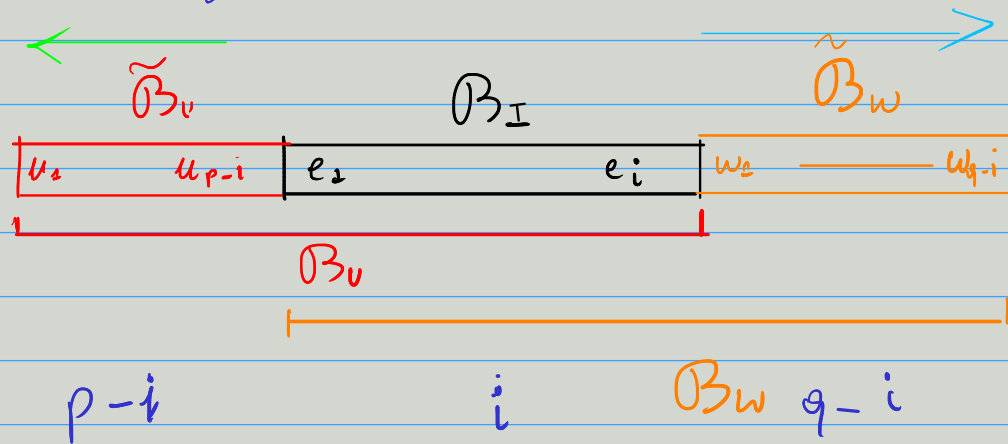
$B_I \subseteq W \rightarrow$ completo B_I a base B_W di W

aggiungendo $\tilde{B}_W = \{\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{q-i}\}$ vettori

$B = \tilde{B}_U \cup B_I \cup \tilde{B}_W$ sequenza di $p+q-i$ vettori

B è unione di una seq. di generatori per U (B_U)
e una seq. di generatori per W (B_W).

$\Rightarrow B$ genera sicuramente



generatori: OK

$B_U \cup B_W$

Dobbiamo mostrare che è una sequenza libera.

Supponiamo per assurdo che sia legata

$$0 = \boxed{\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{p-i} \bar{u}_{p-i}} + \boxed{\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i} + \boxed{\gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{q-i} \bar{w}_{q-i}}$$

con coeff. non tutti nulli

OSSERVIAMO CHE $(\alpha_1 \dots \alpha_{p-i}) \neq (0 \dots 0)$

perché altrimenti avremmo una c. lineare a coeff. non tutti 0
di B_W che dà $\underline{0}$ $\alpha_j \neq 0$

$$\underline{0} \neq \bar{u} = \underbrace{-\alpha_1 \bar{u}_1 - \dots - \alpha_{p-1} \bar{u}_{p-1}}_{\in U} = \underbrace{\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{q-1} \bar{w}_{q-1}}_{\in W}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{0} \neq \bar{u}} \in U \cap W = \underline{I} \quad \text{quindi } \bar{u} \text{ è c. lineare di } (\bar{e}_i - e_i)$$

$$\bar{u} = \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i = -\alpha_1 \bar{u}_1 - \dots - \alpha_{p-1} \bar{u}_{p-1}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{p-1} \bar{u}_{p-1} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i = \underline{0}$$

ma questa è una c. lineare a coeff. non tutti 0
($\alpha_j \neq 0$) di vettori di B_U che dà $\underline{0}$ $\downarrow$

Ne segue che la sequenza $\tilde{B}_U \cup B_I \cup \tilde{B}_W$ è libera

e dunque BASE di $U+W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim(U+W) = |\tilde{B}_U \cup B_E \cup \tilde{B}_W| = p+q-i = \\ = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

□

Applicazioni

Siano $\dim U = 4$ $\dim W = 3$ con $U, W \subseteq \mathbb{R}^5$

si determinano le possibili dimensioni di
 $U+W$ e $U \cap W$.

$$4 \leq \max(4, 3) \leq \dim(U+W) \leq \min(3+4, 5) = 5$$

$$4 \leq \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \leq 5$$

$$4 \leq 7 - \dim(U \cap W) \leq 5$$

$$\boxed{3 \geq \dim(U \cap W) \geq 2}$$

OSS $\rightarrow$ $\dim(U \cap W) = 3 \Rightarrow W \subseteq U \Rightarrow U + W = U \quad \dim(U + W) = 4$
 $\dim(U \cap W) = 2 \Rightarrow \dim(U + W) = 5 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^5$

Formule per esercizi

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U + W) \leq \min(\dim V(K), \dim U + \dim W)$$

da questo si ragiona su $\dim(U \cap W)$

Def. Sia $U \subseteq V(K)$ si dice complemento diretto di U ogni sottospazio W di $V(K)$ tale che

$$U \oplus W = V(K)$$

OSS. Il complemento diretto non è unico.

Es.

$\mathbb{R}^3$

$$U = \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0))$$

$$W = \mathcal{L}((0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1))$$

$$W' = \mathcal{L}((1 \ 1 \ 1), (0 \ 0 \ 1))$$

$$\dim(U \cap W') = 0$$

Come si ottiene un complemento diretto di U ?

Con il teorema di completamento della base

$U \rightarrow \mathcal{B}_U$ e completiamo a base
di $V(K)$ $\mathcal{B}_U$

aggiungendo i $\tilde{\mathcal{B}}$ estratti da
vettori
una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $V(K)$

$L(\tilde{B})$ è un complemento diretto
di U

perché $\dim U + \dim L(\tilde{B}) = \dim V(K)$

perché $L(U \cup \tilde{B})$ è proprio $V(K)$
per costruzione

quindi $U \oplus L(\tilde{B})$ $\dim U \cap L(\tilde{B}) = 0$

$$U = L((1300), (0100)) \leq \mathbb{R}^4$$

$$B = ((1000), (0100), (0010), (0001))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\uparrow) = U$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\uparrow) = W$$

$$\text{con } U \oplus W = \mathbb{R}^4$$

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \{ (a+b, b-\gamma, 2a+2\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, \gamma \in \mathbb{R} \}.$$

$$W_k = L(A_k) \quad \text{ove} \quad A_k = ((2k-1, 1, 1), (0, 0, k), (2, 1, k+1))$$

$$k \in \mathbb{R}.$$

per quali valori di k la somma $U + W_k$ è diretta
un complemento diretto di U .

$$a(1 \ 0 \ 2) + b(1 \ 1 \ 0) + \gamma(0 \ -1 \ 2)$$

$$U = L((102), (110), (0 \cancel{-1} 2)) \rightarrow \begin{array}{c} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 2 \end{array} \right] = 0 \end{array}$$

$$\dim U = 2$$

per trovare un c. diretto di U completiamo a base di $\mathbb{R}^3$ $((102) \ (110))$ ad es. con il vettore (100) . $D = L((100))$

Validiamo vedere quando la somma $U + W_k$ è diretta.

$$\dim(U) = 2$$

$$rk \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix}}_{M_k} \geq 1$$

$$\text{se } k \neq 0 \Rightarrow \text{rk}(M_k) \geq 2$$

$$\text{se } k=0 \quad \text{rk} \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad -1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2 \quad 1} & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim W_k \geq 2$$

$$\dim U = 2$$

$$\dim(U + W_k) \leq 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim(U + W_k) < 4 \leq \dim U + \dim W_k$$

$$\text{ne segue } \dim(U \cap W_k) \geq 1 \quad \forall k$$

e dunque la somma non è mai diretta.

Es. 5 / 31/10/2018

Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ di dim rispettivamente

4 e 7.

1) Si determiniamo le possibili $\dim(U+W)$, $\dim(U \cap W)$

2) Se possibile si scrivano U e W tali che $U \oplus W$ sia un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$

→ Risposta 1) No $U \oplus W$ è possibile perché se $U \oplus W \Rightarrow$
 $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = 4 + 7 = 11$
 $\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^n$ che non è sottosp. proprio

$$1) \max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U+W) \leq \min(11, 7+4)$$
$$7 \leq \dim(U+W) \leq 11$$

$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq 4$$

N.B $\dim(U \cap W) = h \Leftrightarrow U \leq W$ e in tal caso
 $U + W = W$

$\dim(U + W) = 11 \Leftrightarrow U \oplus W$ e U, W sono complementi diretti.

OSSERVAZIONE

1) Se si deve calcolare $U \cap W$ come spazio vettoriale è utile avere U e W descritti in termini di equazioni

→ mettendo a sistema le eq. di U e di W

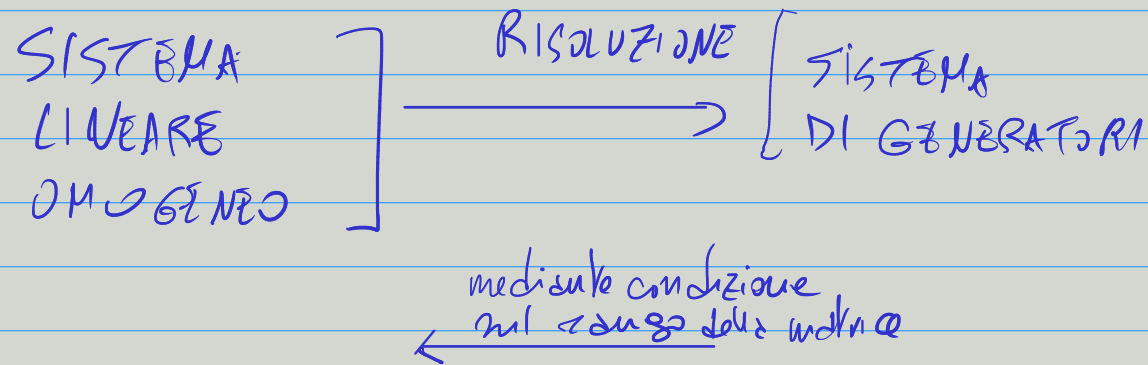
si trova un sistema le cui soluzioni sono gli elementi di $U \cap W$.

2) Se si deve calcolare $U + W$ è utile avere U, W

in termini di insiemini di generatori $U = \mathcal{L}(G_U)$
 $W = \mathcal{L}(G_W)$

in quanto $U + W = \mathcal{L}(G_U \cup G_W)$

e se vi serve una base usate scarichi
matrici / rango.



$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|X)$$

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \} \quad W = \mathcal{L}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z - y + x = 0$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$U \cap W = \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0))$$

$$U = \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1))$$

$$W = \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0), (0 \ 1 \ 1))$$

$$\begin{aligned} U + W &= \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1), \cancel{(1 \ 1 \ 0)}, (0 \ 1 \ 1)) = \\ &= \mathcal{L}((1 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1), (0 \ 1 \ 1)) = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

□