

Teorema: Sia C una curva generale, ℓ_C la polarità associata.

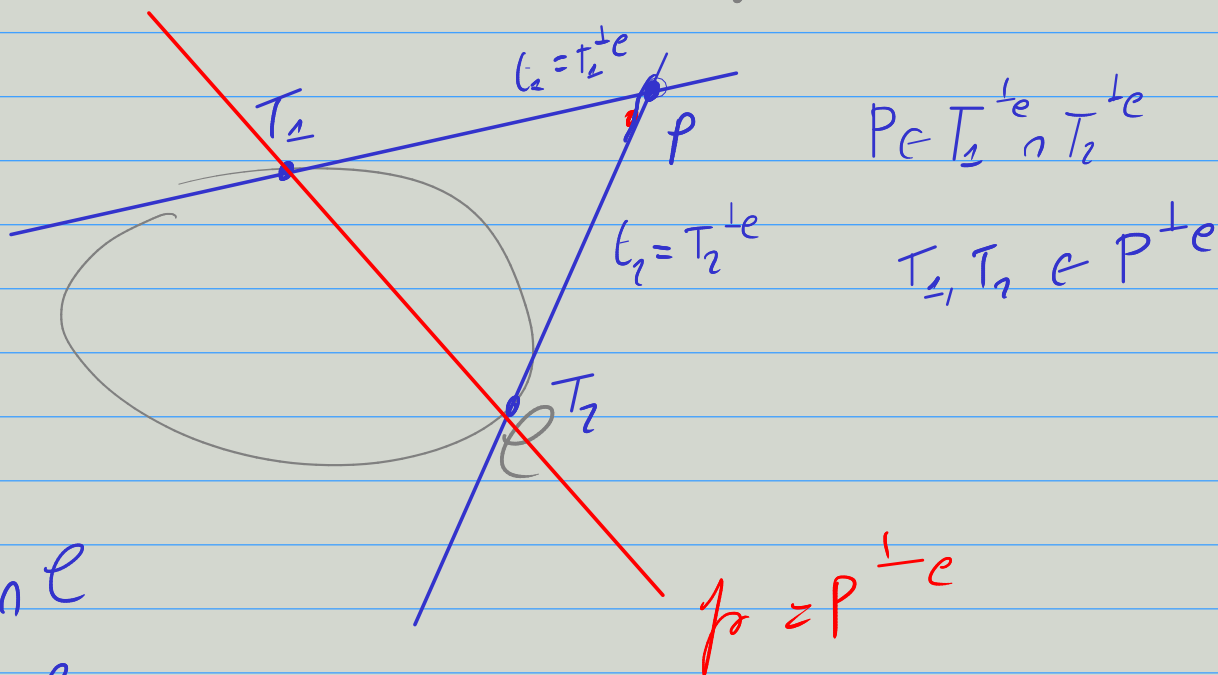
Sia $P = [x_1, x_2, x_3]$ un punto di $TP(\mathbb{R}^3)$.

Allora la polare $P^{\perp_C} = p_0$ di P è la retta che congiunge i punti T_1, T_2 di tangenza delle rette tangenti a C condotte per P .

DIM. Siano t_1 e t_2 le tangenti condotte per P a C .

Se $P \in C \Rightarrow t_1 = t_2$
e $P^{\perp_C} = t_1$ fine.

Altrimenti siano $T_1 = t_1 \cap C$
 $T_2 = t_2 \cap C$



Osserviamo che $t_1 = T_1^\perp$ $t_2 = T_2^\perp$ perché $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$

ma allora $P \in T_1^\perp$ e quindi $T_1 \in P^\perp$

$P \in T_2^\perp$ e quindi $T_2 \in P^\perp$

perché $T_1 \neq T_2$ se $P \notin \mathcal{C}$ la polare di P rispetto a $\mathcal{C}$
è proprio la retta $\angle(T_1, T_2)$. $\square$

Def. Sia $\mathcal{C}$ una conica generale in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

- Si dice CENTRO di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria $x_3 = 0$
 - Si dice che $\mathcal{C}$ è A CENTRO se il centro di $\mathcal{C}$ è un punto proprio ($\Rightarrow \mathcal{C}$ deve essere una ellisse o un'iperbole)
- [per le parabole il centro è il punto improprio, visto che la

retta impropria e' t_g ad esse].

- Si dice DIAMETRO di C una polare di un punto improprio (= retta che passa per il centro).

OSS: $\rightarrow$ per coniche a centro i diametri sono un fascio proprio

$\rightarrow$ per le parabole i diametri formano un fascio improprio

- Si dice ASINTOTO di C una tangente propria a C un suo punto improprio.

[1) un ASINTOTO È SEMPRE UN DIAMETRO

2) le parabole non hanno asintoti

3) le iperboli hanno 2 asintoti reali e distinti; le ellissi hanno 2 asintoti immaginari e coniugati]

Esempio: Si calcolino gli asintoti della circonferenza di equazione $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 12$

GLI ASINTOTI SONO Tg. nei punti impropri

$J_\infty = [1, i, 0]$ e $\bar{J}_\infty = [1, -i, 0]$ alla

circonferenza (che è un caso particolare di ellipse). ESSI

1) passano per J_∞ e $\bar{J}_\infty$

2) passano per il centro

$$C = (7, 5)$$

$\Rightarrow$ Sono le 2 rette

CJ_∞ e $C\bar{J}_\infty$

cioè

$$(x-7) = i(y-5)$$

$$(x-7) = -i(y-5)$$

- Si dice ASSE di una conica ogni suo diametro ortogonale rispetto al prodotto scalare std di $\mathbb{R}^3$ al proprio polo rispetto C . (ha senso perché il polo di un diametro è una direzione).

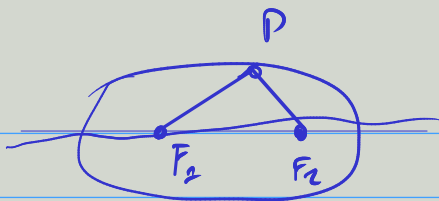
- Si dice VERTICE di C una sua intersezione con un asse di C

- Si dice FUOCO di C ogni intersezione ^{propria} delle tangenti a C condotte dai punti ciclici $\bar{I}_\omega, \bar{J}_\omega$.

- Si dice DIRETTA/CE di C la polare di un fuoco di C .

→ file in cui si dimostra che queste nozioni conducono anche alle def come luoghi geometrici delle coniche.

Es.



Equazione dei diametri

C conica, A matrice associata a C .

coordinata l'eq. del fascio dei diametri.

↓
calcoliamo le p.d.i. dei punti impropri rispetto a C .

$$(l \ m \ 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow l(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

↑
eq. fascio dei diametri

Se intersecate le 2 rette che compaiono nel fascio ottenete il centro.

Forma canonica: $\begin{cases} XAX=0 \\ x_3=0 \end{cases} \rightarrow$ caso pt. impropri di $\mathcal{C}$
 $\rightarrow$ calcolo la polare di essi:

$$a_{11}(x-x_0) + (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})(y-y_0) = 0$$

con $(x_0, y_0) =$ centro della conica.

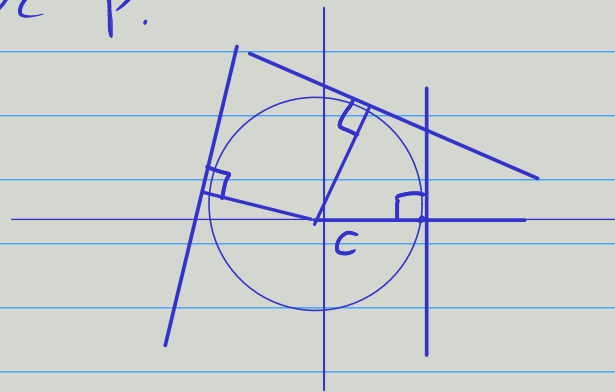
Teoremi:

- 1) Ogni diametro di una circonferenza è un asse
- 2) Se $\mathcal{C}$ è una parabola $\Rightarrow \mathcal{C}$ ha esattamente un asse
- 3) Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro $\Rightarrow \mathcal{C}$ ha 2 assi
distinti ed ortogonali fra loro
- 4) La tangente a $\mathcal{C}$ in un suo vertice è ortogonale all'asse

che passa per quel vertice.

N.B. (1+4) significa che ogni diametro di una circonferenza è un asse e ogni punto di una circonferenza è un vertice.

In particolare la tg. alla circonferenza in un suo punto $P \in C$ è la retta per P ortogonale al diametro per P .



Dim

(1+3) prendiamo il generico diametro di C a centro

$d_{\lambda, \mu}$: $(\lambda a_{11} + \mu a_{12})x_1 + (\lambda a_{12} + \mu a_{22})x_2 + (\lambda a_{13} + \mu a_{23})x_3 = 0$

il polo di questo è $[(\lambda, \mu, 0)]$

Il diametro è ortogonale al proprio polo $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{12} & \lambda a_{12} + \mu a_{22} \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda\mu + a_{12}\mu^2 = 0} \quad (*)$$

Due casi 1) C circonferenza $\Rightarrow$

$$a_{11} = a_{22} \text{ e } a_{12} = 0$$

$\Rightarrow$ OGNI DIAMETRO È ASSE l'eq. è biconale o zero

277) classi di
autovalutazioni

2) è una circonferenza $\Rightarrow (*)$ non è banale $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ si vede che le soluzioni di $(*)$

$$[(\lambda', \mu')]$$

$$[(\lambda'', \mu'')]$$

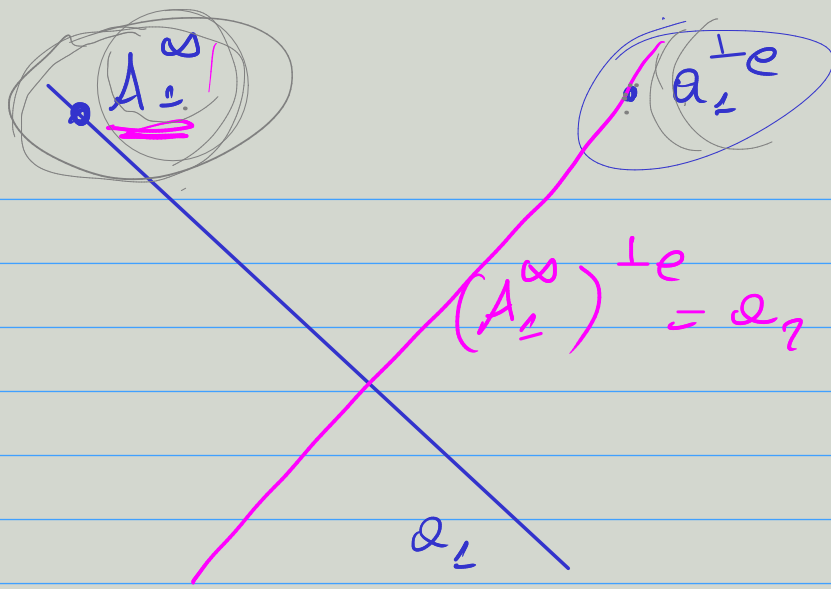
sono tali che

$$\frac{\lambda'}{\mu'} \cdot \frac{\lambda''}{\mu''} = \frac{-a_{12}}{a_{12}} = -1$$

quindi corrispondono a 2 assi
ortogonali fra loro.

N.B

se vogliamo dimostrare che questi
gli assi sono 2 essi sono ortogonali fra
loro possiamo anche ragionare in
modo geometrico.



$$q_1 = \text{asse } 1$$

$$q_2 = \text{asse } 2$$

$A_i^\infty = \text{pb improprio di}$
 q_i

$$q_1^\perp e \perp A_1^\infty$$

$$(A_1^\infty)^\perp e \Rightarrow q_1^\perp e$$

ma il polo di

$$(A_1^\infty)^\perp e = A_1^\infty$$

è ortog. alla
ma dir. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è un asse

$$\Rightarrow (A_1^\infty)^\perp e = q_2$$

Il polo di $q_1 = q_1^\perp e$ è un punto improprio

d'altro centro esso è ortogonale ad A_1^∞

ma allora anche A_1^∞ è ortogonale ad $q_1^\perp e$

In particolare la polare di A_1^∞ passa per

$q_1^\perp e$ per il principio di reciprocità $\Rightarrow$

la polare di A_1^∞ è ortogonale al proprio polo

$\Rightarrow$ esso è un asse $\Rightarrow$ deve essere q_2

2) Se C parabola $\Rightarrow$ eq. dei diametri

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + kx_3 = 0.$$

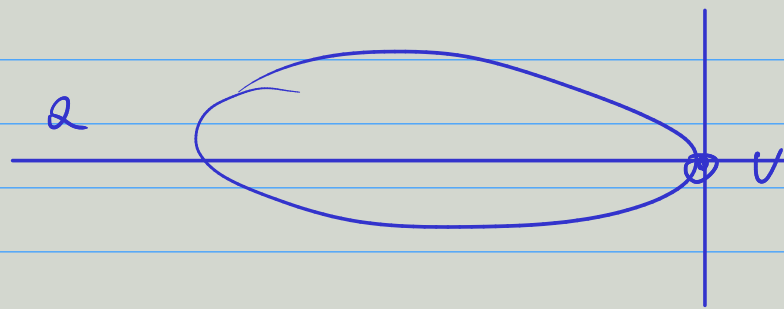
La direzione ortogonale i diametri

$$\text{è } [(-a_{12} \ a_{11} \ 0)] = P_{\infty}$$

e quindi il polo ortogonale al diametro è
dato da

$$P_{\infty}^{\perp} = [(a_{11} \ a_{12} \ 0)].$$

4) Sia V un vertice di C e sia a l'asse
passante per V .



$\Rightarrow$ la tg a C in V è la polare di V rispetto a

C cioè $V^{\perp e}$. ma $V \in \alpha \Rightarrow a^{\perp e} \in V^{\perp e}$
 $\uparrow$
polo dell'asse.

Il polo di α è un punto proprio $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ em è la direzione dell'asse α in V .
e per definizione di asse è ortogonale all'asse
per V_0 . $\square$

Forme canoniche delle coniche generali.

- 1) Se C è una circonferenza $\rightarrow$ scegliamo un riferimento che ha come origine il centro di C e come dir. coordinate 2 diametri ortogonali.

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

||
0

$$C = (-a_{13} \ -a_{23}) = (0 \ 0)$$

Eq. canonica

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}} \quad \text{affine.}$$

2) Se C conica a centro scegliamo

4) come origine il centro

2) come dir. coordinate vettori paralleli gli assi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

deve avere come
2o! $[(0 \ 0 \ 1)]$

$$\Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0$$

GLI ASSI DEVONO AVERE COME PUNTI IMPROPRI / POLI

$$X_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = g_0$$

$$a_{12} \xi^2 + (a_{22} - a_{11}) \xi \mu - a_{12} \mu^2 = 0$$

$$a_{12} = 0$$

$\Rightarrow$ la conica ha equazione del tipo

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$$

$$0 \notin \{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$$

$\downarrow$
passando in coord. affini e semplificando

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

distingue i casi

1) se $ab > 0 \Rightarrow$ ellipse
2) se $ab < 0 \Rightarrow$ iperbole

- e è una parabola.

- ORIGINI DEL RIFERIMENTO = Vertice.

- DIR. COORDINATE (ASSE + T_g nel vertice).

$$\downarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

1) deve passare per $[(0, 0, 1)]$ (vertice) $\Rightarrow a_{33} = 0$

2) deve avere come punto improprio $[(0, 1, 0)] \Rightarrow a_{22} = 0$

3) la polare di $(0, 0, 1)$ deve essere la retta $g = 0$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0 \quad \text{deve essere la retta}$$

$$x_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_{13} = 0$$

Infine: parabola.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \quad \text{ma } a_{22} = 0$$

$$\Rightarrow a_{12} = 0$$

Eq. canonica $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$

semplificando e passando a coord. affini

$$ax^2 = y \quad \square$$

1) Es. BWS 92

Modo facile.

Eq. canonica di una iperbole.

H

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Immaginiamo $(2, 3) \in H$.

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$$

$$4 \frac{b^2}{a^2} - 9 = b^2$$

$$a = 1$$

$$3b^2 = 9$$

$$b = \pm \sqrt{3}$$

$$4b^2 - 9a^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1}$$

Se ho modo più lungo.

$$(2 \ 3 \ 1) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

→ 1 eq. lineare.

$$\det \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0$$

iperbole.

$$Q_{11} = 0 = Q_{22} \quad ; \quad Q_{12} = 1$$

→ controllo $\det A \neq 0$

prendiamo una matrice A 4×4 di
Mongoli.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Tale che
le prime 2
righe siano
un sistema
compatibile
e la seconda 2
righe siano
un sistema comp. p. d.

$$\begin{cases} x=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

$$(0, 0, 1)$$

$$(0, 1, -1)$$

$$y = ax^2$$

una curva di eq. $y = ax^2 + bx + c$ e'

una parabola

GA.

$$a + b + c = 0$$

$$a \neq 0 \quad a=1, b=0, c=-1$$

$$y = x^2 - 1$$

$$D) \quad (x-1)^2 = 0$$

$$\overset{2}{x_3} = 0$$

$$(3x + 5y - 7)^2 = 0$$

$$E) \quad \pi: 3x + 7y + 5z + 3 = 0$$

$$3x + 2y + 5z + 7 = 0$$

CONICA RIDUCIBILE PER UN PUNTO DATO

$$P = (3, 4).$$

Unione di 2 rette di cui almeno una passa per P.

$$[\alpha(x-3) + \beta(y-4)](x+5y-7) = 0$$

Se P deve essere anche il punto doppio.

La conica deve essere il prodotto di 2 rette per P.

$$[(x-3) + (y-4)][2(x-3) + 5(y-4)] = 0$$

Descrivere tutte le coniche che hanno $P = (5, 7)$

Come punto doppio $\rightarrow$ prodotto di 2 rette del fascio di

Centro P.

$$[\alpha(x-5) + \beta(y-7)][\gamma(x-5) + \delta(y-7)] = 0$$

con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$
sono ∞^2 rette e altre ∞^2 modi per scegliere la
prima e la seconda retta

$\alpha: 2x + 3y - z + 5 = 0$ una retta $\mathcal{R} \perp \alpha$ deve avere
param. direttori $(2, 3, -1)$.

$$\begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 3t + y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x = -2z + 7 \\ y = -3z + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-z \\ z=z \end{cases} \rightarrow (0, -1, 1)$$

$$0(x-x_0) + (-1)(y-y_0) + 1(z-z_0) = 0$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

$$\boxed{-y + z = 0}$$

$$d: 3x + y + 2z - 5 = 0 \rightarrow 3x + y + 2z = 0 \rightarrow \dim = 2$$

$$((1, -3, 0) \quad (0, 2, -1))$$

TROVARE LO SP. di TRASLAZIONE equivale

o risolvere il sist. omogeneo associato.

Trovare una conica con ~~unico~~ punto doppio $P = (3, 5)$

$$A_3(\mathbb{C})$$

o

$$A_3(\mathbb{C})$$

$\rightarrow$ $\exists$ in quanto le rette

t_0 ed t_1 sono
complementari

$\downarrow$
Non esiste perché è un punto
improprio e dunque non un punto
di $A_3(\mathbb{C})$

$$\downarrow$$

$$x - z = 0$$

Fascio di piani con supporto per $P = (0, 0, 1)$
 $Q = (1, 0, 0)$.

$$\boxed{y = 0}$$

$$(x + z = 1)$$

$$\Rightarrow \alpha y + \beta(x + z - 1) = 0$$

la retta per P e Q è la retta

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-1}{0-1}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=1-z \end{cases}$$

$$P = [(0011)] \quad Q = [(1001)]$$

$$\tilde{H}_0 = \mathcal{L}((0011) (1001))$$

In simboli semplificati

$$\pi = \mathcal{L}([(0011)' (1001) (1000)])$$

$$\pi' = \mathcal{L}((0011) (1001) (0100))$$

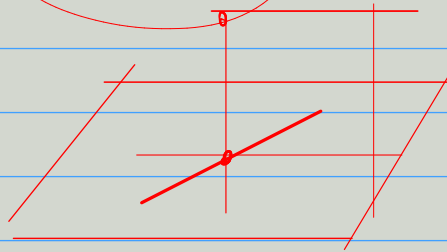
$$\pi: \begin{cases} 2y+1=0 \\ x=z \end{cases}$$

$$(1 \ 0 \ 1)$$

↓
si risolve sist. omogenea
associata $\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$

$$\sigma: \begin{cases} x=y \\ x-2z+1=0 \end{cases}$$

$$(2 \ 2 \ 1)$$



$$\begin{cases} x=y \\ x=2z \end{cases} \rightarrow x=2z-1$$

$\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$
euclideo

trovare piano α per $\cap$ parallelo ad π e poi
distanza punto/piano fra un qualsiasi punto di π
ed α

$$\alpha(x-y) + \beta(x-2z+1) = 0 \quad \begin{matrix} (\alpha+\beta & -\alpha & -2\beta) \end{matrix}$$

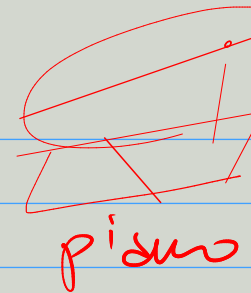
$$(\alpha+\beta)x + (-\alpha)y + (-2\beta)z + \beta = 0$$

$$(1 \ 0 \ 1) \cdot (\alpha+\beta \ -\alpha \ -2\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta-2\beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

$$\alpha: \quad (x - y) + x - 2z + 1 = 0$$

$$2x - y - 2z + 1 = 0$$



$$P = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \in \pi$$

$$d(P, \alpha) = \frac{\left|2 \cdot 0 + \frac{1}{2} + 1\right|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\left|2 \cdot 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot 1\right|$$

$$\begin{cases} 0x + 2y + 0z = -1 \\ x + 0y - 1z = 0 \end{cases}$$

BASE DELLA DIREZIONE



PARAMETRI DIRETTORI

BASE 5 vettori non COMPONENTI DEI VETTORI

$$d: 3x + y + 2z - 5 = 0$$

DATO un riferimento $\Gamma = (O, (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))$.

$\Leftrightarrow L \left((-1, 3, 0), (0, -2, 1) \right)$ soluzioni del sistema.

non è $\mathbb{R}^2$ ma potrebbe essere uno s.v. triviale generato da
in $\mathbb{R}^3$ di $\dim = 2$ generato da
 $\bar{e}_1$ ed $\bar{e}_2, \bar{e}_3$

sono le componenti rispetto a O dei vettori dati.

$$e_1 - 3\bar{e}_2$$

$$2\bar{e}_1 - e_3$$

Si scrivano rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^2$
i vettori di una base dello spazio di
traslazione della retta richi equazione.

$$2x + y - 7 = 0 \quad \text{rispetto il riferimento}$$

$$\text{affine} \quad T = (O, B = (\overline{v_1}, \overline{v_2}))$$

$$\text{con } \bar{e}_1 = (1, 0) \quad \bar{e}_2 = (0, 1).$$

$$D = \mathcal{L}(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2) =$$

$$\mathcal{L}((1, -2))$$

$$= \mathcal{L}(2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)) = \mathcal{L}((-3\bar{e}_2)) = \mathcal{L}((\bar{e}_2))$$

Rigetto la base canonica di $\mathbb{R}^2$ la direzione di π
e ha componenti $(0, 1)$. #