

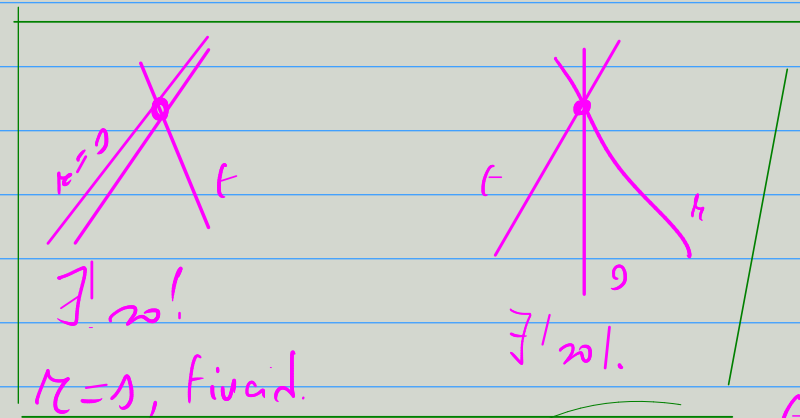
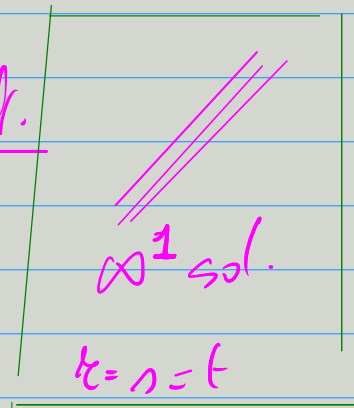
Spazio Ampliato e Completato $\rightarrow$ studiare curve/varietà algebriche.

T

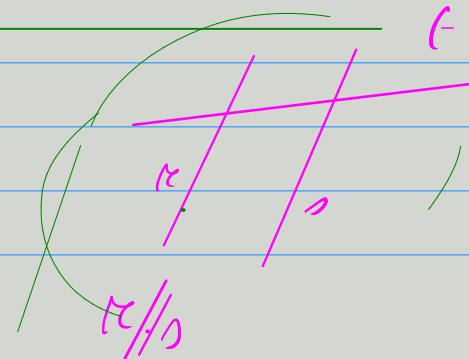
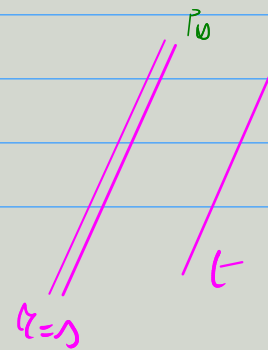
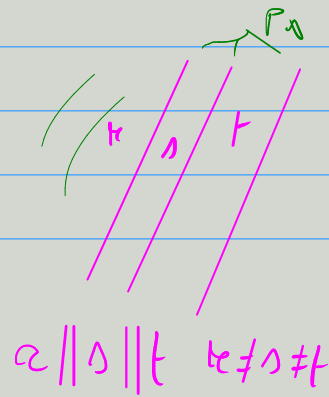
Esempio: pos. reciproci di 3 rette in $A_2(\mathbb{R})$

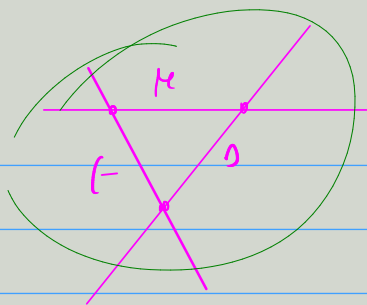
$$\begin{cases} r & a_{11}x + a_{12}y = -a_{13} \\ s & a_{21}x + a_{22}y = -a_{23} \\ t & a_{31}x + a_{32}y = -a_{33} \end{cases}$$

comp.



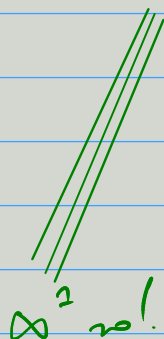
in comp.



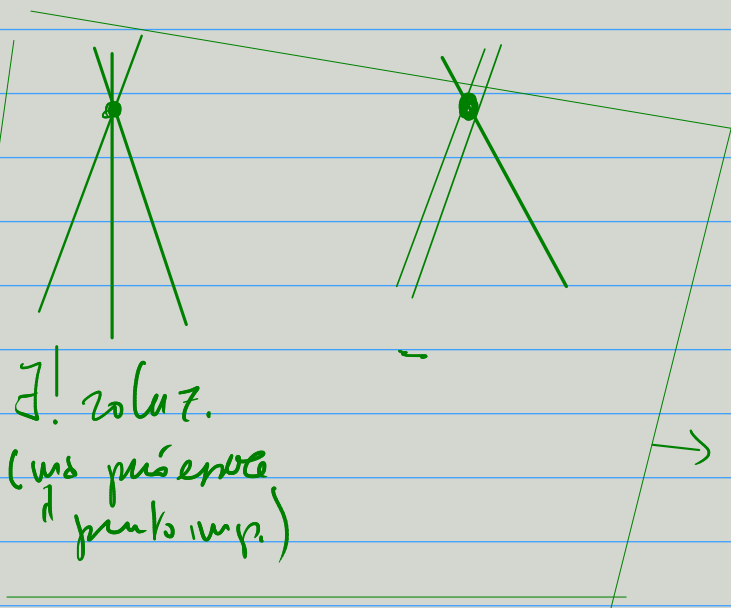


N.B in subito simplistic

$$\text{rk}(A) = 1$$



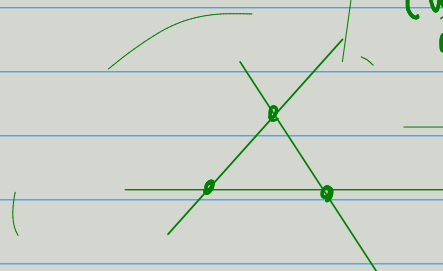
∞^2 sol.



7! soluz.
(una generica
1 punto imp.)

in $A_2(k)$

$$\rightarrow \text{rk}(A) = 2$$



non ci sono
soluzioni

$$\rightarrow \text{rk}(A) = 3$$

|| Se lavoro in subito affine $A_n(k)$ la funzione è non surgettiva (a priori)

in ambito sempliato $\tilde{A}_n(\mathbb{R})$ la funzione deve essere omogenea.

Per la pos reciproca di 2 rette $\rightarrow$ forse è meglio lavorare in ambito sempliato e poi vedere se i punti in comune sono propri o impropri.

Curve algebriche in $\tilde{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \tilde{A}_2(\mathbb{C})$

I ordine $\rightarrow$ curva algebrica reale piana del I ordine
è una retta di eq $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
 $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$

II ordine $\rightarrow$ Def: Una curva algebrica reale piana del II ordine

e' detta conica.

$$\text{Eq. } F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

con F polinomio omogeneo di $\mathbb{R}$ grado
e coeff. reali.

$$(*) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

↑

si ha

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

$$(*) \text{ si scrive anche come } (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$XAX = 0$$

In particolare A è una matrice reale e simmetrica

$\Rightarrow A$ definisce un prodotto scalare $b_A(x, y)$
associato alla conica C di equazione (*)

$$b_A(x, y) = (x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

e $P \in C \Leftrightarrow b_A(\underset{\uparrow}{x}, \underset{\uparrow}{x}) = 0$ ove X = vettore coord di P

cioè in altre parole $P \in P^{\perp A}$ ove

$$P^{\perp A} := \{ Q \in \widetilde{A_2(\mathbb{R})} \mid b_A(X, X') = 0 \text{ e } X' = \text{coord di } Q, X = \text{coord di } P \}$$

L'equazione della conica si scrive come

$$q_A(x) = 0 \quad \text{ove} \quad X = [(x_1 \ x_2 \ x_3)]$$

e $q_A(x) = b_A(x, x)$.

N.B.: Il prodotto scalare b_A è associato alla equazione (*) della conica e non alla conica stessa. Infatti eq. proporzionali danno la stessa conica ma prod. scalari differenti.

D'altro canto

$$b_A(X, Y) = {}^t X A Y$$

$$\lambda \neq 0 \quad b_{\lambda A}(X, Y) = {}^t X \lambda A Y = \lambda ({}^t X A Y)$$

$$\text{e dunque} \quad X \perp_A Y \Leftrightarrow b_A(X, Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^t X A Y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda {}^t X A Y = 0 \Leftrightarrow b_{\lambda A}(X, Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow X \perp_{\lambda A} Y$$

In particolare "l'orbitale" dipende da C
ma non dall'eq. scelta per C . e quindi

possiamo indicarla con $\perp_C$
sia C una carica generale.

Def: Sia $P \in L_2(\mathbb{R})$. Si dice polo di
 P rispetto a C l'insieme dei punti $P^{\perp_C}$.

Sia $\mathcal{H}$ una tetta di $A_2(\mathbb{R})$ si dice
polo di $\mathcal{H}$ il punto $\mathcal{H}^{\perp_C}$.

[N.B $\dim_{\text{vett}} \mathcal{H}^{\perp_C} = 3 - \dim_{\text{vett}} \mathcal{H} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{punto}$]

Studio delle cariche $\rightarrow$ equivalente a studiare
le forme intinere del pider.

- Teoremi:
- 1) Una conica non ha punti tripli.
 - 2) Una conica è riducibile $\Leftrightarrow$ essa ha almeno un punto doppio.
 - 3) Una conica con esattamente un punto doppio è spezzata in 2 rette (reali e distinte o immaginarie coniugate).
 - 4) Una conica con almeno 2 pt. doppi ha ∞^2 ed è unione di 2 rette reali e coincidenti.
 - 5) I punti doppi di una conica corrispondono alle classi di soluzioni di $AX = \underline{0}$ ove A è la matrice della conica.

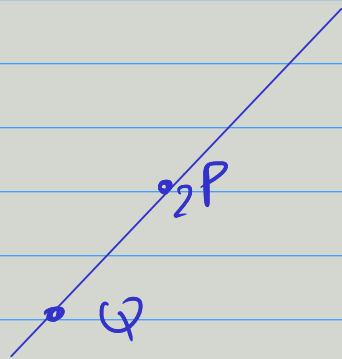
DIM

1) conica = curva di ordine 2

sappiamo $P \in C$ triplo $\Rightarrow$ la con $P \in \pi$
 interseca C almeno 3 volte $\Rightarrow$ essa è

componente di $C \Rightarrow C$ è un fascio di rette $\mathcal{L}$

2)



C conica

P doppio.

In $A_2(C)$ $\exists$ almeno $Q \neq P$ con
 $Q \in C$.

$\nearrow$
 curve proprie
 C alg. chiuso.

$\Rightarrow$ la retta PQ interseca C almeno 3 volte $\Rightarrow$

$PQ \subseteq C$. Sempre perché C alg. chiuso $\Rightarrow$
 e quindi ∞

l'equazione della retta PQ divide l'eq. di $C \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ l'equazione di C è prodotta di 2 equazioni
di I grado $\Rightarrow C$ è riducibile

N.B

poiché la conica C è una curva reale

e l'equazione $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ della retta r

non è a coeff. reali $\Rightarrow \bar{G}(x_1, x_2, x_3) \neq G(x_1, x_2, x_3)$

e dunque anche $\bar{G}(x_1, x_2, x_3) \mid F(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$

$$F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) \bar{G}(x_1, x_2, x_3)$$

e le rette che compongono C sono
immaginarie e coniugate ed il loro punto
reale è proprio il punto doppio P .

Esempio $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$

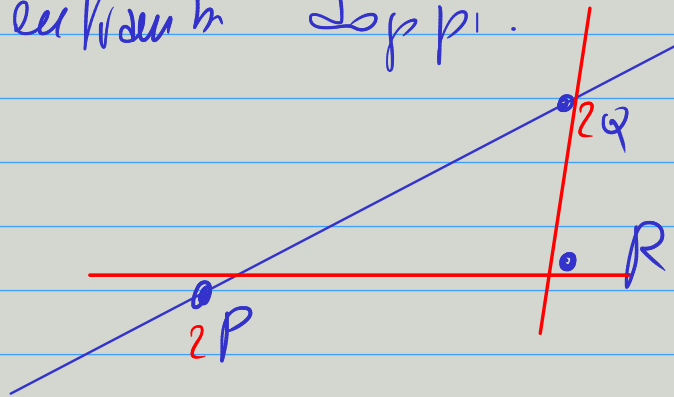
$$P \in (2, 3)$$

$$u: (x-2) + i(y-3) = 0$$

$$\bar{u}: (x-2) - i(y-3) = 0$$

3) Se C si spezza in 2 rette reali e
coincidenti $\Rightarrow F(x_1, x_2, x_3) = (G(x_1, x_2, x_3))^2$
ed ogni suo punto è doppio $\Rightarrow \infty^2$ pts. dopp.
 $\Rightarrow$ Se C ha punti doppi ne ha solo 1 e si deve
spezzare in 2 rette distinte. $\begin{cases} \text{reale} \\ \text{e non coniugate} \end{cases}$

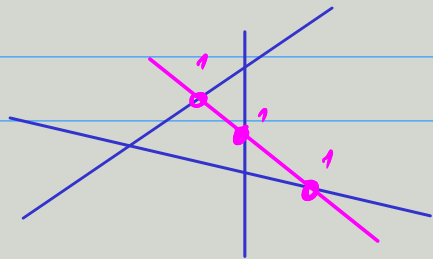
4) Supponiamo ora che C abbia ≥ 2 punti doppi
 $P \neq Q$ entrambi doppi.



Se C è la retta PQ contata 1 volta $\Rightarrow$ FINE

Altrimenti supponiamo $R \in C \setminus PQ$

$\Rightarrow$ le rette PQ , PR e QR intersecano C
 in almeno 4, 3, 3 volte $\Rightarrow$ sono tutte e 3
 componenti di C . $\Rightarrow C$ contiene un
 triangolo



$\Rightarrow C$ deve essere una curva di ordine almeno 3 perché
 esistono rette non componenti che lo intersecano in 3
 punti $\Rightarrow y$ quindi R non esiste

5) Supponiamo $(x_1 \ x_2 \ x_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ eq. della conica.

$$(*) \quad \begin{cases} x^T A x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (x^T A x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (x^T A x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (x^T A x) = 0 \end{cases}$$

conf: $\begin{cases} x^T A x = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$

Il sistema (*) diventa $\begin{cases} {}^t X A X = 0 \\ A X = 0 \end{cases}$
ed è chiaro che $A X = 0 \Rightarrow {}^t X A X = 0$

$\rightarrow$ I punti doppi sono tutte e sole
le classi di autosol. dell'eq. $A X = 0$

In particolare: Se $\rho(A) = 3 \Rightarrow$ Non ci sono punti
Doppi $\square$

$\rho(A) = 2 \Rightarrow \exists!$ punto doppio

$\rho(A) = 1 \Rightarrow \infty^2$ punti doppi

oss.: come si legano gli autovalori di A e le
coniche?

A è una matrice reale e simmetrica

↓
non sempre diagonalizzabili

↓
diagonalizzabile corrisponde a cercare una base
opportuna per il prod scalare in dotta.

Possiamo anche provare ad applicare G/S.
ai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$
rispetto il prodotto in dotta da A .

↓
pb A non è definito positivo!

con G/S. mi riesce a trovare una base di
 $\mathbb{R}^3$ rispetto la quale il prod. scalare definito da A

ha matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ con

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{-1, 0, +1\}.$$

Inoltre: segni di α, β, γ sono gli segni dei
segni degli autovalori di A

(segue dalla dim. del Veroeura della base spettrale)

POSSIAMO CLASSIFICARE LE CONICHE IN $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$
STUDIANDO I SEGNI DATI.

I casi possibili sono

$(+++)$ / $(---)$ $\rightarrow$ prod scalare definito positivo (neg.)
non ci sono punti con $q(x)=0$.

$(++0)$ / $(--0)$ $\rightarrow rk(A)=2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \rightarrow 2$ rette
in cov.
 $(+-0)$ / $(-+0)$ $\rightarrow rk(A)=2 \rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow 2$ rette reali e
distinte
 $(+00)$ / (-00) $\rightarrow rk(A)=1 \rightarrow 2$ rette reali e cov.

$(++-)$ / $(--+)$ $\rightarrow$ conica generale e punti
reali.

SIGNATURE

$$x_1^2 y_1^2 = 0$$

$\pm$	$(+++)$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$
$\pm$	$(++-)$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
$\pm$	$(++0)$	$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$
$\pm$	$(+-0)$	$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$
$\pm$	$(+00)$	$x_1^2 = 0$

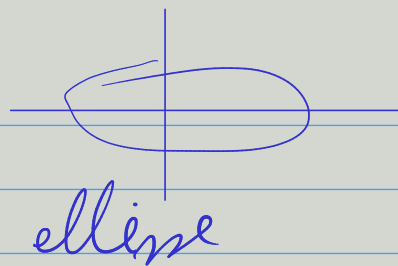
$\rightarrow$ conica generale senza punti reali

$\rightarrow$ conica generale e punti reali

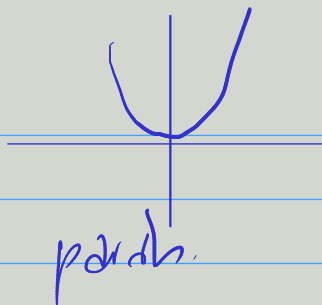
$\rightarrow$ conica riducibile in 2 rette imm.
coniugate

$\rightarrow$ conica riducibile in 2 rette reali e dist.

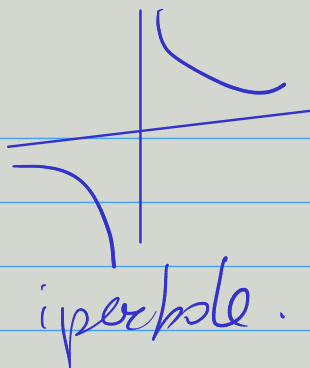
$\rightarrow$ conica rid. in 1 retta 2 volte.



ellisse



parabola



iperbole.

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE

$$\mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \subseteq \widetilde{\mathbb{A}_2(\mathbb{R})}$$

↓
 [STUDIAMO I PUNTI IMPROPRI
 cioè studiamo i loro punti
 che NON sono affini.] ↓

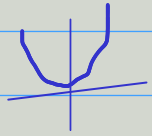
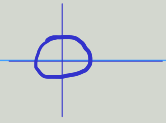
Def

Sia C una conica generale

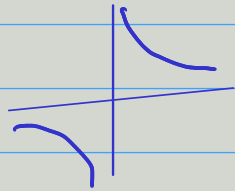
(cioè priva di punti doppi) e sia $L_\infty: [x_3=0]$
 la retta impropria.

C è detta

- Ellisse se $C \cap A_\infty = C_\infty$ consta di 2 punti immaginari e coniugati.



- Parabola se $C \cap A_\infty = C_\infty$ è un punto reale contato 2 volte.



- Iperbole se $C \cap A_\infty = C_\infty$ sono 2 punti reali e distinti.

come riconosce le coniche generali dalla matrice.

$$1) \det(A) \neq 0$$

$$2) \begin{cases} XAX = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

DOBBIAMO STUDIARE LE RADICI DELLA PARTE DI II grado.

$$\frac{\Delta}{h} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\det(A^*) < 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{h} > 0 \Rightarrow \text{IPERBOLE}$$

$$\det(A^*) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{h} = 0 \Rightarrow \text{PARABOLA}$$

$$\det(A^*) > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{h} < 0 \Rightarrow \text{ELLISSE}$$

CLASSIFICAZIONE
AFFINE

→ OBIETTIVO → TROVARE LE FORME CANONICHE PER LE CONICHE

CI SERVE CONOSCERE QUALCHE PROP. IN PIÙ.

→ STUDIAMO LA POLARITÀ ASSOCIATA AD

UNA CONICA GENERALE (= privo di punti $\downarrow$ ppi.).

1) La relazione $\perp_e$ manda un punto $P \mapsto$ in una retta $P^{\perp_e}$
una retta $r_0 \mapsto$ in un punto $r_0^{\perp_e}$

$$2) P^{\perp_e \perp_e} = P \quad r_0^{\perp_e \perp_e} = r_0$$

$$3) P \perp_e Q \Leftrightarrow b_A(P, Q) = 0 \Leftrightarrow b_A(P, Q) = b_A(Q, P) = 0 \Leftrightarrow Q \perp_e P$$

$$(4) P \in Q^{\perp_e} \Leftrightarrow Q^{\perp_e \perp_e} \in P^{\perp_e} \text{ cioè } Q \in P^{\perp_e}$$

[principio di reciprocità]

Siano P un punto $p_0 = P^{\perp_e}$ la sua polare

$\Rightarrow Q$ appartiene alla polare p_0 di $P \Leftrightarrow$ la polare di Q passa per P . Viceversa: poli delle rette per P

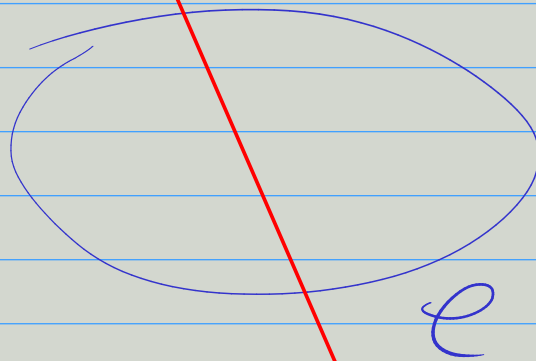
appartengono alla polare di P .

$$Q \in P^\perp \Leftrightarrow P \in Q^\perp$$

$$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow P^\perp \in P^\perp = P \quad \perp$$

$$P = P^\perp$$

$\cdot P$



$\mathcal{C}$ conica generale

Teorema: 1) Un punto $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow P \in P^\perp$ ✓
 $h(P, P) = 0$

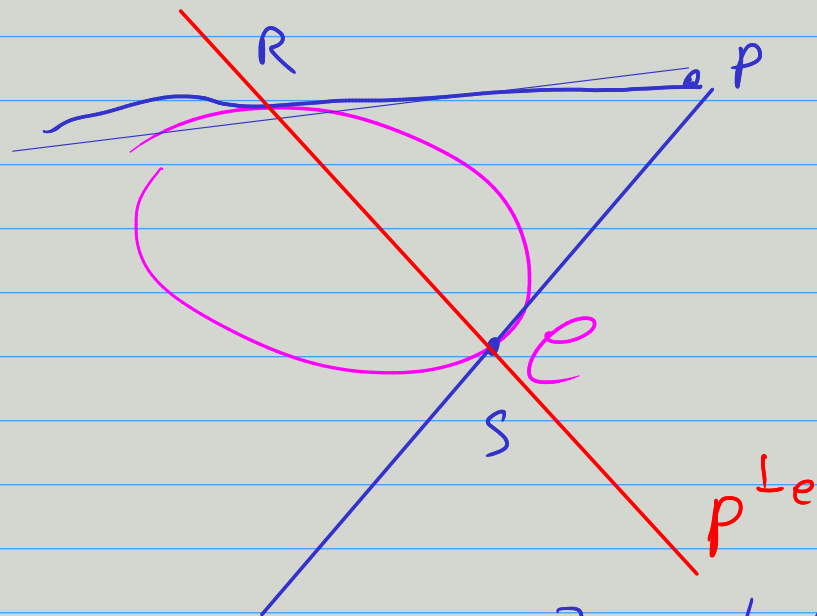
2) Inoltre in tale caso $P^\perp$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$

da P

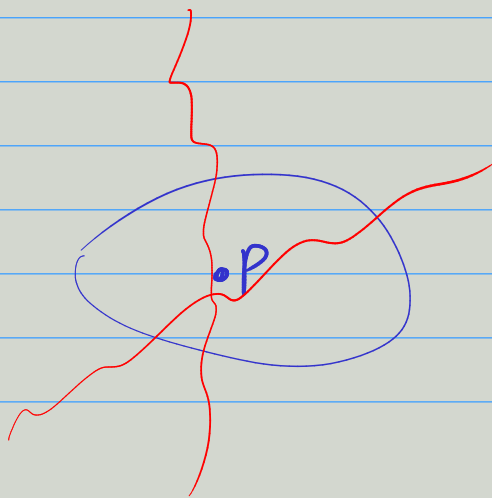
3) Se $P \notin C \Rightarrow P^\perp_C = \{R, S\}, R \neq S$

e P è l'intersezione delle rette

tangenti a C rispettivamente in R ed in S .



P è detto esterno
a C se le tangenti a
 C per P sono 2
rette reali e distinte



P è detto interno a C
se le tangenti a C per P
sono 2 rette imm. coincidenti

Studiamo le rette tangenti ad una conica ${}^tXAX=0$

$$\begin{cases} {}^tXAX=0 \\ X = \lambda X' + \mu X'' \end{cases} \leftarrow \text{eq. parametriche di una retta}$$

$${}^t(\lambda X' + \mu X'')A(\lambda X' + \mu X'') = 0 \quad \text{deve avere una soluzione doppia per qualche } \lambda, \mu$$

$$\lambda^2({}^tX'AX') + 2\lambda\mu({}^tX'AX'') + \mu^2({}^tX''AX'') = 0$$

$${}^tX'AX'' = {}^tX''AX'$$

$$\frac{\Delta}{h} = (\hat{X}' A X'')^2 - (\hat{X}' A X') (\hat{X}'' A X'')$$

voglio che il punto X'' sia appartenente
a C e la tangente.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta}{h} = 0}_{\text{tangente}} \quad \& \quad \underbrace{\hat{X}'' A X'' = 0}_{X'' \in C}$$

$\Rightarrow$ sostituendo ottengo $(\hat{X}' A X'')^2 = 0$

cioè $\boxed{\hat{X}' A X'' = 0} \Leftrightarrow b_A(X', X'') = 0$

e questo vale per ogni punto X' che sta sulla
tangente in X'' a C

$$X' \in X''^\perp e$$

cioè X' è sulla tangente a e in $X'' \in e \Rightarrow$
 X' è sulla polare di X'' rispetto a e . $\square$

Il punto 3 lo vediamo domani. $\perp$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2ky & = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y & = k+1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x + y = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2k & -3 \\ 1 & 1 & -k-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = k(1-2k)$$

OSS 1) Se $k \neq 0, \frac{1}{2} \Rightarrow$ le 3 rette non hanno
punti in comune

1) Se $k \neq 0, \frac{1}{2} \Rightarrow$ le 3 rette non hanno
punti in comune

1) Se $k = 50, \frac{1}{7} \Rightarrow \ell k(A) = 2$

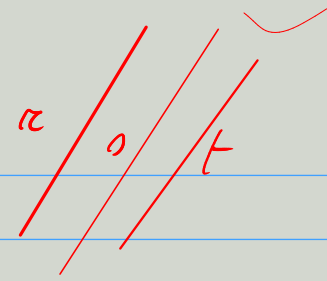
→ le recte hanno un punto
in comune $\Rightarrow$ esse
appartengono ad un fascio.

$$\boxed{k=0} \quad \begin{cases} x=3 \\ x+y=-1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{C} \quad \mu_{11} = \{ (3, -4) \}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = +3 \\ x+y = \frac{3}{2} \\ x+y = 1 \end{cases}$$



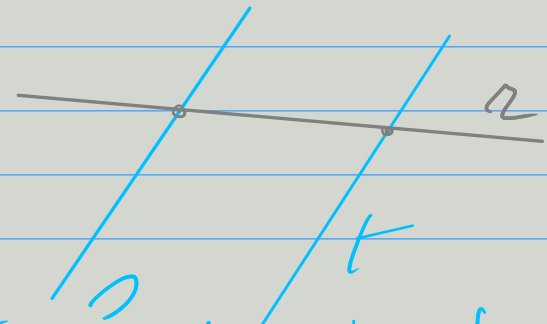
r, o e t sono parallele e distinte.

$$k \neq 0, \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \begin{cases} x+2ky & = 3 \\ x+y & = k+1 \end{cases} \\ o &\rightarrow \begin{cases} x+y & = k+1 \end{cases} \\ t &\rightarrow x+y = 1 \end{aligned}$$

OSSERVIAMO CHE o e t hanno la stessa parte omogenea e sono distinte.

$\Rightarrow o, t$ sono parallele.



k è par. ad $o \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow k$ non è par. ed è incidente entrambe