

$$\begin{matrix} [010] & [101] & [111] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & A_2(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

$$E_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trovare in $A_3(\mathbb{R})$ le rette per i 2 punti $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

NON VA BENE

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$Q = (x_1, y_1, z_1)$$

è una retta impropria.

$$r = \mathcal{L}((1000), (0100))$$

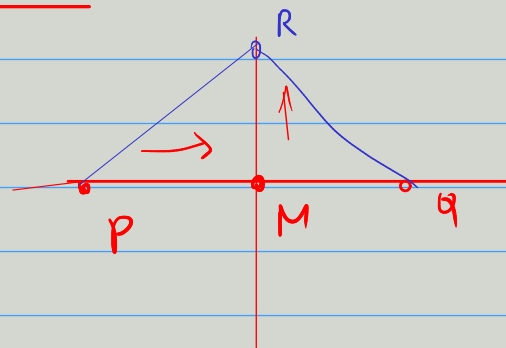
$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

equazione

$$r^\perp = \mathcal{L}((0010), (0001))$$

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underline{Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \quad \rightarrow \underline{\text{retta impropria}}$$



in $E_2(\mathbb{R})$

in $E_3(\mathbb{R})$ stessa dimostrazione

→ piano assiale → il luogo dei punti equidistanti
da P e Q ($P \neq Q$) è il piano passante
per il punto medio fra P e Q ed ortogonale al
vettore $\overrightarrow{PQ}$

Def: In $E_n(\mathbb{R})$ si dice ipersfera di centro P e raggio r_0
il luogo dei punti a distanza r_0 da P.

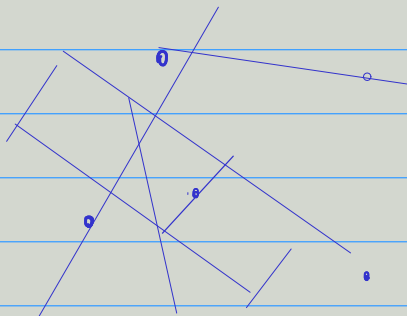
$$P = (p_1 \dots p_n)$$

$$(x_1 - p_1)^2 + (x_1 - p_2)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 = r^2$$

e si possono svolgere ragionamenti analoghi a quelli fatti per le circonferenze nel piano.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases} \quad \text{punti impropri}$$

↓ ASSOLUTO DELLA IPER SFERA

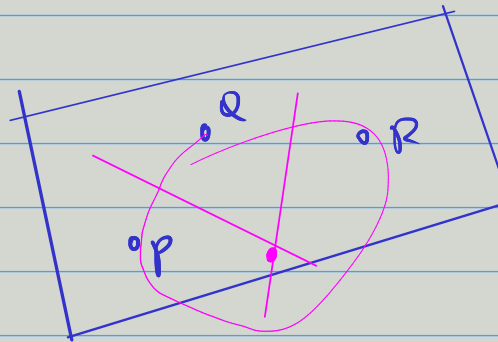


CIRCONFERENZE NEL PIANO

SFERE NELLO SPAZIO.

CIRCONFERENZE NELLO SPAZIO → contenute in un piano.

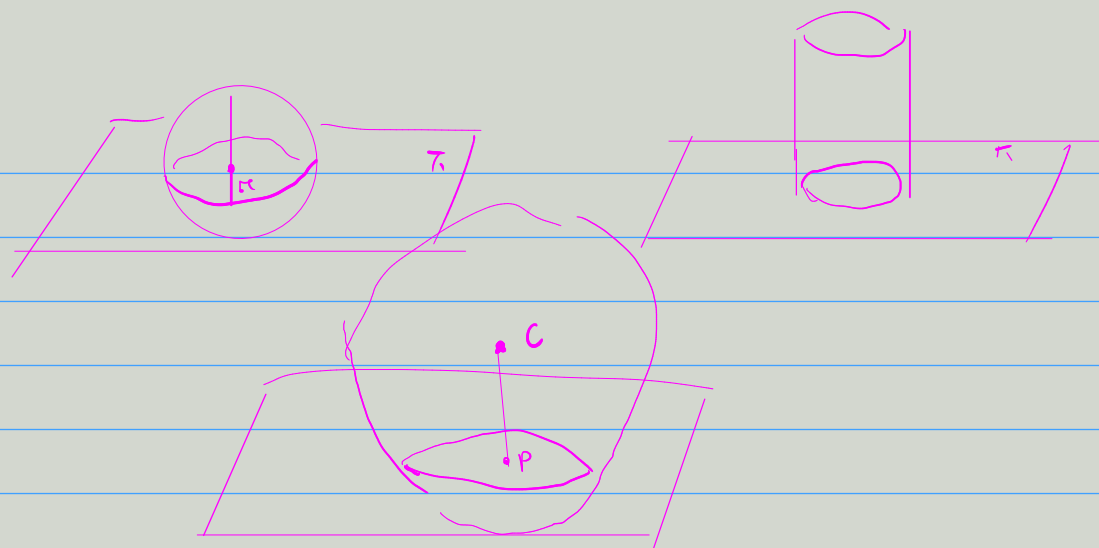
DATI 3 punti non allineati $\exists!$ circonferenza che
passa per essi.



N.B. nello spazio una circonferenza ammette tante eq. differenti.

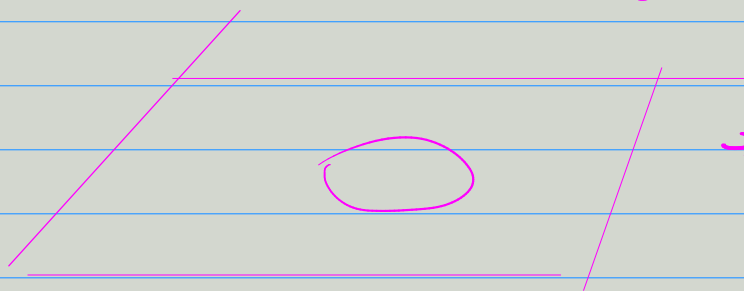
Una retta nello spazio è descritta mediante l'intersezione
di 2 piani che formano un fascio

Una circonferenza è pure descritta da un sistema
che consiste di 2 equazioni di cui almeno una di II
grado.



Trovare la circonferenza per i 3 punti $(1\ 0\ 0)$ $(0\ 1\ 0)$
 $(0\ 0\ 1)$

↓ $E_3(\mathbb{R})$.



$$\rightarrow \underline{ax + by + cz + d = 0}$$

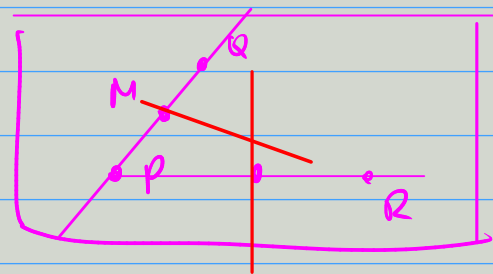
$$(*) \rightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}$$

$$d = -a \neq 0$$

$$\pi: \boxed{x + y + z - 1 = 0}$$

$$P = (100) \quad e Q = (010)$$

$$P = (100) \quad e R = (001)$$



$$\bullet \quad [z=0 \text{ con } x+y+z-1=0]$$

$$[y=0 \text{ con } x+y+z-1=0]$$

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$PQ. \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$$

param. dir.

$$(-1, 1, 0)$$

$$PR. \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-z \\ y=0+0 \cdot z \\ z=z \end{cases} \rightarrow (-1, 0, 1)$$

$$(1, 0, -1)$$

piano ortogonale a $\vec{PQ}$ per $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$$\rightarrow -1(x - \frac{1}{2}) + 1(y - \frac{1}{2}) = 0$$

piano ortogonale a $\vec{PR}$ per $M' = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

$$-1(x - \frac{1}{2}) + 1(z - \frac{1}{2}) = 0$$

Il centro della circonferenza è dato dalla int

$$\text{di } \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ (x - \frac{1}{2}) - (z - \frac{1}{2}) = 0 \\ (x - \frac{1}{2}) - (y - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ z = x \\ 3x = 1 \end{cases}$$

$$C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$(a \ b \ c)$ sono i
coeff. di
un vettore $\perp$
al piano.

Quindi un piano ortogonale alla dir di (a, b, c)
e passante per $P = (x', y', z')$

ha eq

$$\pi: a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0$$

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

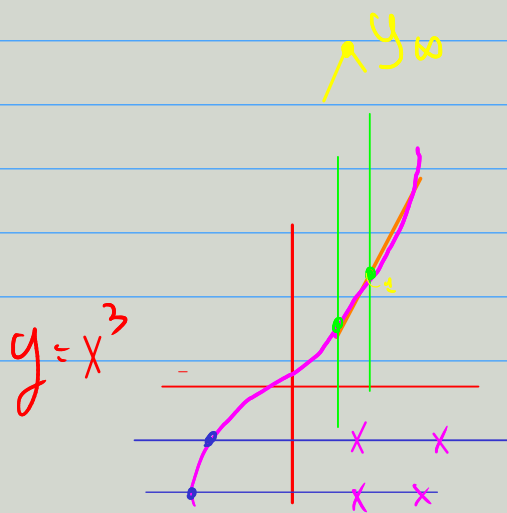
$$d\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), (1, 0, 0)\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

OSS: Anche se ci interessano curve reali $E_2(\mathbb{R})$ o superfici reali in $E_3(\mathbb{R})$ è utile avere a disposizione il corpo complesso.

Es. le circonferenze in $\mathbb{R}$ non hanno punti impropri: ma in $\mathbb{C}$ passano per ∞ e $\bar{\infty}$

COMPLESSIFICAZIONE $\rightarrow$ non significa tanto lavorare in

$\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$ quanto riconoscere la geometria euclidea $\widetilde{E_n(\mathbb{R})}$ come sottosistema di $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$.



Def. Un punto di $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ è detto reale se
esso ammette una rappresentazione $P = [(x_1 x_2 x_3)]$
con $(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Esempio $P = [(1 0 1)] \in \widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ è reale
 $Q = [(i -i 0)] \in \widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ è reale.

$$[(1 -1 0)]$$

Dato $\widetilde{A}_2(\mathbb{R})$ è possibile immergere $\widetilde{A}_2(\mathbb{R})$ in
 $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ mediante la funzione che
associa ad ogni spazio vettoriale

$W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $W_{\mathbb{C}} := \langle W \rangle_{\mathbb{C}}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{R}} \sim \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}((110)) \in \widetilde{A}_2(\mathbb{R})$$

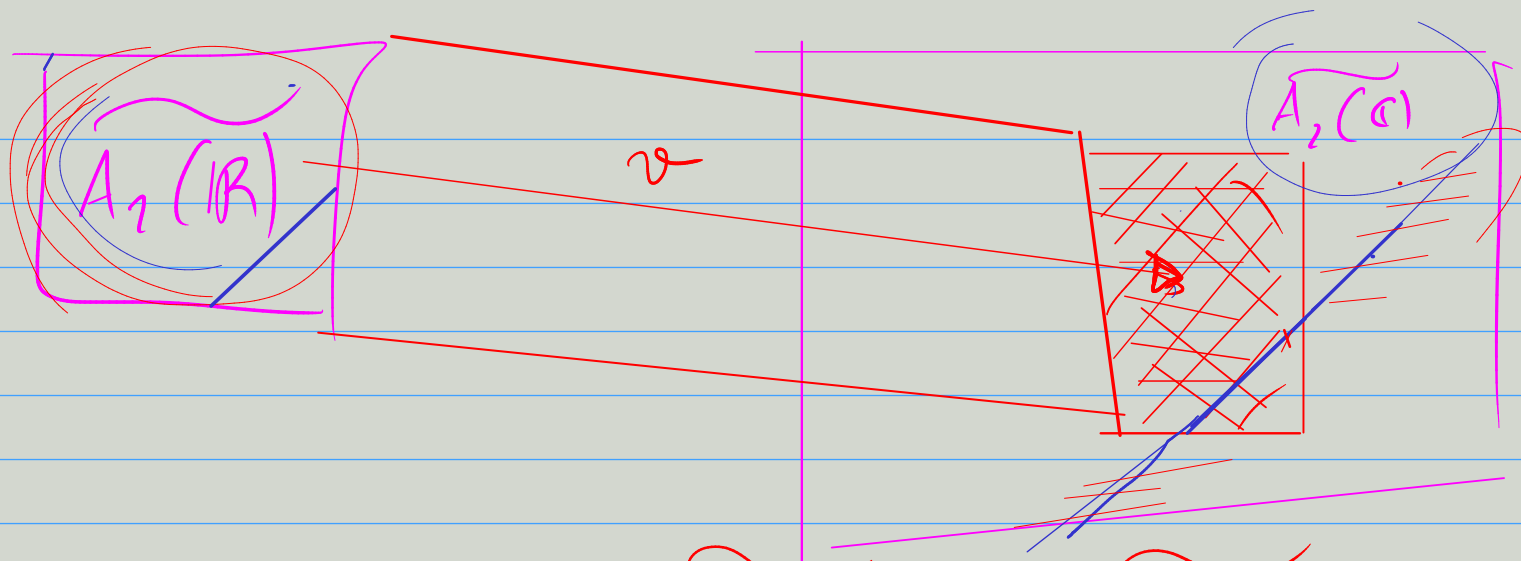
associato $\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{L}_{\mathbb{C}^3}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}((110))) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}^3}((110)) \in \widetilde{A}_2(\mathbb{C})$$

$$(i \ i \ 0) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}^3}((110)) \text{ ma}$$

$$(i \ i \ 0) \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}((110))$$

oss la funzione $\mathcal{V}: \widetilde{A}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ è
 iniettiva e manda sottospazi di dim. k
 su $\mathbb{R}$ in sottospazi di dim. k su $\mathbb{C}$.



Le immagini dei punti di $A_2(\mathbb{R})$ in $A_2(\mathbb{C})$ sono tutti e soli i punti reali di $A_2(\mathbb{C})$.

Le immagini delle rette di $A_2(\mathbb{R})$ sono dette rette reali in $A_2(\mathbb{C})$.

COME RICONOSCERE I PUNTI REALI.

Def Sia $\widetilde{A_1}(\mathbb{C})$ un primo semplificato e completificato
 e sia $P = [(x_1, x_2, x_3)]$ un suo punto.
 Si dice $\left\{ \begin{array}{l} \text{complesso coniugato di } P \text{ il} \\ \text{punto } \bar{P} = [(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)]. \end{array} \right.$

Teorema (1) $\bar{P}$ è un punto
 (2) P è reale $\Leftrightarrow P = \bar{P} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} = 1$

Dim: (1) Sia $(y_1, y_2, y_3) \in P$ dobbiamo far vedere che
 $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \bar{P}$

ma $(y_1, y_2, y_3) \in P \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ tale che

$$(y_1, y_2, y_3) = \alpha (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$$

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = \bar{\alpha} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \in \bar{P} \quad \square$$

2) Se P è reale $\Rightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale
 che $P \equiv [(x_1, x_2, x_3)] \Rightarrow \bar{P} \equiv [(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)] =$
 $= [(x_1, x_2, x_3)] \equiv P$

viceversa: Supponiamo $P = \bar{P} \Rightarrow$

$$[(x_1, x_2, x_3)] = [(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)]$$

$$\Rightarrow \exists k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} = 1$$

Due casi

1) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = -(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = -x_1$$

$$\bar{x}_2 = -x_2$$

$$\bar{x}_3 = -x_3$$

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3$ sono tutti e 3
 numeri immaginari puri

$\Rightarrow i(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3$ è reale

$$\Rightarrow P \equiv [i(x_1 x_2 x_3)] = [(x_1 x_2 x_3)]$$

$\Rightarrow P$ è reale.

no invece $(x_1 x_2 x_3) \neq -(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(x_1 x_2 x_3) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \quad \text{con } d \neq -1$$

$$\Rightarrow (x_1 + \bar{x}_1 \quad x_2 + \bar{x}_2 \quad x_3 + \bar{x}_3) = (d+1)(x_1 x_2 x_3) \in P$$

| (d+1) \neq 0

questo è
un vettore di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow P$ è reale
diverso da $\underline{0}$ $\square$

Def. Una $\left\{ \begin{array}{l} \text{curva} \\ \text{reale} \end{array} \right\}$ algebrica in $\widetilde{A_2(\mathbb{C})}$ è detta reale e.

es una curva real si la ecuación $F(x_1, x_2, x_3) = 0$
donde F es un polinomio homogéneo a coef.
en $\mathbb{R}$.

Teorema C es real $\Leftrightarrow C = \overline{C}$ o sea
 $\overline{C} = \{ \overline{P} \mid P \in C \}$.

Obs. Si $C: F(x_1, x_2, x_3) = 0$ es una curva real
 $\Rightarrow$ si $P \in C$ se ha también $\overline{P} \in C$
(así $C = \overline{C}$).

Si $P = (x'_1, x'_2, x'_3) \in C \Rightarrow$

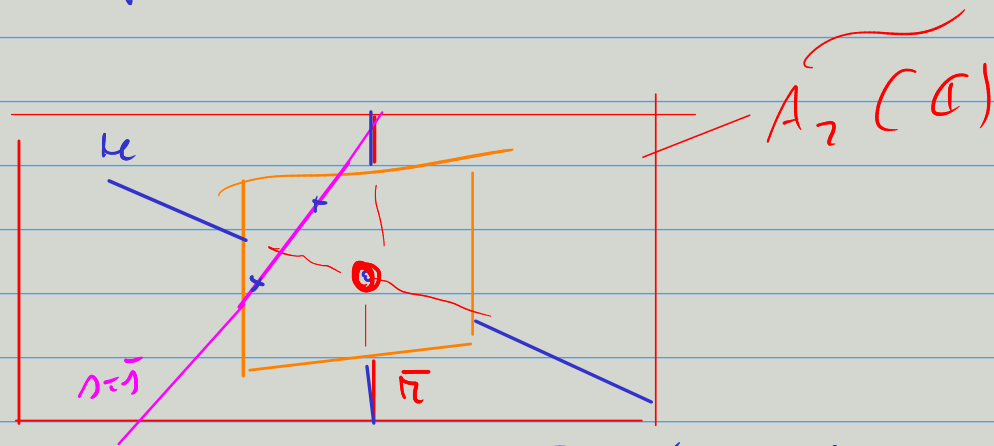
$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = 0 \Rightarrow \text{conjugado de } F(x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$F(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3) = 0 \quad \text{md} \quad F = \bar{F}$$

$$\Rightarrow F(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3) = 0 \quad \text{coe} \quad \bar{P} \in \mathcal{C} \quad \square$$

Diunque in particolare $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$.



Teorema: Ogni retta di $\widetilde{A}_2(\mathcal{C})$ ha almeno un punto reale. Se una retta ha 2 punti reali $\Rightarrow$ è reale.

DIM: Sia ℓ una retta e $\bar{\ell}$ la sua coniugata.

Se $\kappa = \bar{\kappa} \Rightarrow \kappa$ è reale (fine)

Se $\kappa \neq \bar{\kappa} \Rightarrow \exists P = \kappa \cap \bar{\kappa}$ ma allora $\bar{P} = \overline{\kappa \cap \bar{\kappa}} = \bar{\kappa} \cap \bar{\bar{\kappa}} = \bar{\kappa} \cap \kappa = P$

quindi P è un punto reale.

Supponiamo ora che κ abbia almeno 2 punti reali (P, Q) e che κ sia la retta per P, Q .

ma $\bar{\kappa}$ è la retta per $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ con

$\bar{P} = P, \bar{Q} = Q \Rightarrow \bar{\kappa} = \kappa$ ed κ è reale. $\square$

Teorema: per ogni punto immaginario P (cioè tale che $\bar{P} \neq P$) esiste una ed una sola retta reale.

DIM se κ per P è reale $\Rightarrow \bar{P} \in \kappa$ e quindi κ è la retta per P e $\bar{P}$ ma $\bar{\kappa}$ è la retta per $\bar{P}$ e P e coincide con $\kappa \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi$ è reale

□

Esempio 1) trovare la retta reale per il punto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \end{bmatrix} \in \pi \quad \bar{P} \in \pi$$

è la retta impropria $x_3=0$

(π deve contenere le direzioni distinte rapp. da P e $\bar{P}$)

$\Rightarrow$ non può essere una retta propria $\rightarrow$ è la retta $x_3=0$

2) trovare la retta reale per $P = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \end{bmatrix}$

trovare la retta per i punti:

$$P = (1, i)$$

$$\bar{P} = (1, -i)$$

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-i}{i+i} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

3) trovare un'equazione reale per la retta
reale per il punto $P = (2+i, 1-i)$

coordinate
affini

$$P = (2+i, 1-i) \quad \bar{P} = Q = (2-i, 1+i)$$

$$\frac{x - (2+i)}{(2-i) - (2+i)} = \frac{y - (1-i)}{(1+i) - (1-i)}$$

$$\frac{x - (2+i)}{-2i} = \frac{y - (1-i)}{2i} \rightarrow \overline{x - (2+i) = (1-i) - y}$$

Trovare se esiste una eq. reale della retta per

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & i \end{bmatrix}$$

una retta reale per P e Q esiste $\Leftrightarrow$ lo sp. vett.

$W = \mathcal{L}((1, 1, 0), (1, i+1, i))$
 è un sotto spazio di $\mathbb{R}^3$

come lo scopriamo? Vediamo se $W = \bar{W}$ in particolare

$$\begin{aligned}
 \bar{W} &= \mathcal{L}((1, 1, 0), (1, 1-i, -i)) = \\
 &= W
 \end{aligned}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & -i \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} \\ 1 & 1+i & i \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-i & -i \\ 1 & 1+i & i \end{pmatrix} =$$

$$= \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & i & i \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow W = \bar{W} \Rightarrow W \text{ è reale!}$$

$$P = [(1, 1, 0)] \quad Q = [(0, 1, 1)]$$

osserviamo che $\overline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \end{bmatrix} = P$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2i & -2i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{n=3}$$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{E_3(\mathbb{R})} & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{A_3(\mathbb{C})} \\ W & \longrightarrow & \langle W \rangle_{\mathbb{C}^n} \end{array}$$

Definiamo il coniugato di un punto $P = [(x_1, x_2, x_3, x_n)]$
 $\overline{P} = [(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_n)]$

P è reale $\Leftrightarrow P = \bar{P}$

Un luogo geometrico Σ è reale $\Leftrightarrow \Sigma = \bar{\Sigma}$

In particolare una varietà algebrica (curva/superficie) è reale $\Leftrightarrow$ è descritta da un insieme di eq. a coeff. in $\mathbb{R}$.

Es. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 4X_4^2 = 0$ è reale

$X_1^2 + iX_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0$ non è reale

Teorema: Ogni primo di $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ contiene almeno una retta reale.

DIM: Se $\pi = \bar{\pi} \Rightarrow \pi$ reale e contiene α rette reali.

Se $\pi \neq \bar{\pi} \Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \emptyset$ retta e

$$\overline{\pi} \cap \pi = \overline{L} = \pi \cap \overline{\pi} = L$$

quindi $L = \overline{L} \Rightarrow L$ reale.

Esercizio: 1) trovare una descrizione reale della
retta reale del piano $\pi: x + 2iy + 3z = i$

$$re: \begin{cases} x + 2iy + 3z = i \\ x - 2iy + 3z = -i \end{cases}$$

$\pi \cap \overline{\pi}$ retta reale

$$\downarrow \quad re \quad \begin{cases} 2x + 6z = 0 \\ 4iy = 2i \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + 6z = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$\nearrow$ eq. richiesta

2) trovare la retta reale del piano $\pi: x + y + z = 3 - i$ || ATTEN.
è IMPROPRIA!

$$\mu \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + (i-3)x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + (-i-3)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mu \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ \underline{\underline{x_4 = 0}} \end{cases}$$

$$\mu \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

In $\widetilde{A_3(\mathbb{C})}$ cosa succede alle rette?

rette reali $\rightarrow$ OK $\mu_0 = \bar{\mu}_0$

rette immaginarie $\begin{cases} \text{I specie se } \mu \text{ ed } \bar{\mu} = P \\ \text{II specie se } \mu \text{ ed } \bar{\mu} \text{ sono} \\ \text{Sghembe.} \end{cases}$

esempio : classificare la roots di eq.

$$\Gamma_+ \begin{cases} x + 2iy + 3i = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Gamma_- \begin{cases} x - 2iy - 3i = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Γ_+ ed Γ_- sono contenute in $z = 2$

$\Rightarrow \Gamma_+$ ed Γ_- sono complanari e dunque
si intersecano in ^{almeno} un punto.

$\Gamma_+ \neq \Gamma_- \Rightarrow \Gamma_+, \Gamma_-$ sono immaginario di I specie

2)

$$\Gamma_+ \begin{cases} x + iy + z = 0 \\ z = 2i \end{cases}$$

$$\Gamma_- \begin{cases} x - iy + z = 0 \\ z = -2i \end{cases}$$

λ ed $\bar{\lambda}$ non hanno punti propri in comune!

$$M_K \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2i \\ 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{array} \right] =$$

$$= M_K \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 2i \end{array} \right] = L$$

$$\nearrow \det = 2i \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -i & 1 \end{vmatrix} = 2i \left(-2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \right) \neq 0$$

Quindi λ ed $\bar{\lambda}$ sono sghembi

Esercizio Data γ_0 retta in un di $\mathbb{I}$ specie
trovare un piano π reale che
la contiene.

Oss. Se π piano reale che contiene $\gamma_0 \Rightarrow \overline{\gamma_0} \subseteq \overline{\pi} = \pi$
quindi se γ_0 è di $\mathbb{I}$ specie $\exists!$ piano reale
che la contiene (in particolare quello che contiene
 γ_0 e $\overline{\gamma_0}$).

Sol. In coord. omogenee.

$$\gamma_0 = L(v_1, v_2) \Rightarrow \overline{\gamma_0} = L(\overline{v_1}, \overline{v_2})$$

$$\gamma_0 \text{ è reale se } \dim L(v_1, v_2, \overline{v_1}, \overline{v_2}) = 2$$

κ_0 è di $\mathbb{I}$ specie se $\dim L(v_1 v_2 \bar{v}_1 \bar{v}_2) = 3$

e in particolare il primo caso che
contiene κ che $\bar{\kappa}$ è quello
descritto da $L(v_1 v_2 \bar{v}_1 \bar{v}_2)$

κ è di $\mathbb{I}$ specie se $\dim L(v_1 v_2 \bar{v}_1 \bar{v}_2) = 4$

Esempio: κ id

$$\kappa_0 = L((1 \ i \ 0 \ 1), (0 \ 0 \ 1 \ 1))$$

$$\bar{\kappa}_0 = L((1 \ -i \ 0 \ 1), (0 \ 0 \ 1 \ 1))$$

$$\dim \kappa + \bar{\kappa} \leq 3 \quad \dim \kappa + \bar{\kappa} = 3$$

$$\pi = L((1 \ i \ 0 \ 1) \ (1 \ -i \ 0 \ 1) \ (0 \ 0 \ 1 \ 1)) =$$

$$= L((1 \ 0 \ 0 \ 1), (0 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 1))$$

provate a fare qualche esercizio

$$\alpha. \begin{cases} x + y + iz = 0 \\ x + 2iy + z = 0 \end{cases}$$

ne ha un punto reale $(0,0,0)$ e quindi non può essere di Π specie.

$$\alpha(x + y + iz) + \beta(x + 2iy + z) = 0$$

prendiamo un punto di $\bar{\Pi} \setminus \Pi$

$$P = \left(i - \frac{i+1}{2i+1}, \frac{i+1}{2i+1}, 1 \right)$$

$$\bar{\Pi} \begin{cases} x + y - iz = 0 \\ x + 2iy + z = 0 \end{cases}$$

$$z = 1$$

$$x = i - y$$

$$x = -1 + 2iy$$

$$i - y = -1 + 2iy$$

$$(2i+1)y = i+1 \quad y = \frac{i+1}{2i+1}$$