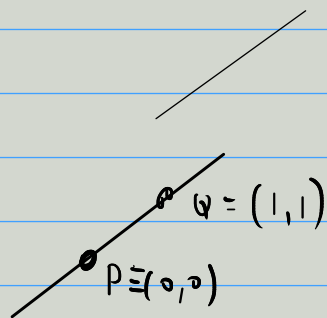


Equazione caratteristica di una curva con almeno 2 punti doppi.

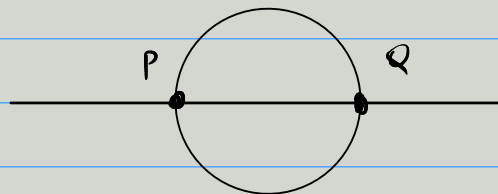
I ordine $\rightarrow$ NON $\exists$.

II ordine (conica)



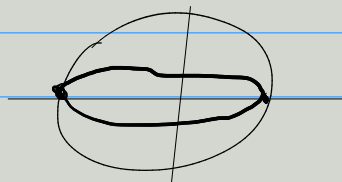
$$(y-x)^2 = 0$$

III ordine con 2 punti doppi P, Q deve contenere la retta per P e Q perché questa retta ha almeno ~~4~~ intersezioni con la curva.



$$y(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

IV ordine



Teorema: Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione di una curva algebrica C in $\widetilde{A_2}(K)$ con K algebric. chiuso.

$\Rightarrow$ I punti multipli di C sono esattamente tutti e soli quelli le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Dove la derivata parziale $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ è calcolata in modo formale.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} \cdot i x_1^{i-1} x_2^j x_3^k$$

Example

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 8x_3 + 2x_2 \\ F(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

Esercizio

Si studi l'insieme di tutte le coniche
che passano per i punti:

$$P_1 = [(1 \ 0 \ 1)] \quad P_2 = [(0 \ 1 \ 0)] \quad P_3 = [(1 \ 1 \ 1)] \\ P_4 = [(2 \ 0 \ 1)]$$

$$\boxed{2 \text{ vie}} \rightarrow \underset{\uparrow}{a_{11}}x_1^2 + 2\underset{\uparrow}{a_{12}}x_1x_2 + \underset{\uparrow}{a_{22}}x_2^2 + 2\underset{\uparrow}{a_{23}}x_2x_3 + \underset{\uparrow}{a_{33}}x_3^2 + 2\underset{\uparrow}{a_{13}}x_1x_3 = 0$$

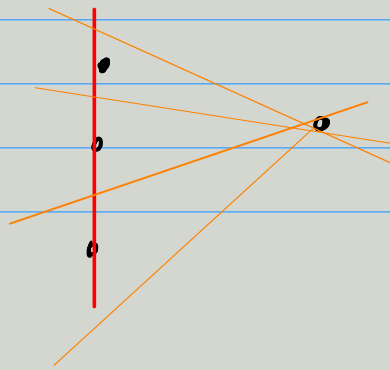
6 coeff $\hookrightarrow$ eq. $\rightarrow \infty^2$ soluzioni
che rapp. ∞^2 coniche
 $\downarrow$
si vede come sono fatte.

Modo PIÙ SEMPLICE $\rightarrow$ usando il teorema dell'ordine.

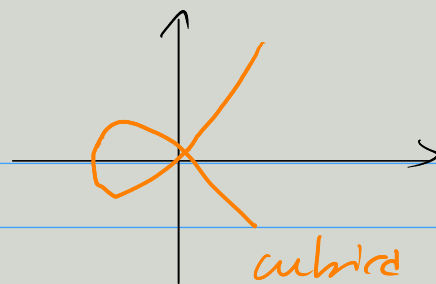
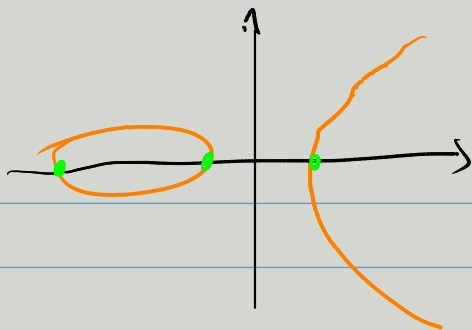
P_1, P_2, P_3 sono allineati $\Rightarrow$ la retta per
 P_1 e P_2 ha almeno 3 intersezioni con C .
 $\Rightarrow$ la retta per P_1 e P_2 è componente la
 conica ed ha equazione $(x-1=0)$

La nostra conica dunque si spezza in 2
 rette una è $r: (x-1=0)$; l'altra
 dovrà passare per $P = [(2, 0, 1)] \notin r$

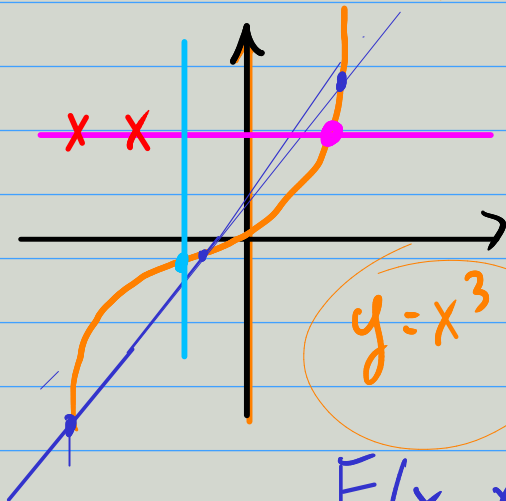
$\Rightarrow$ l'eq è del tipo $(x-1)(\alpha(x-2) + \beta(y-0)) = 0$



Cubica



cubica
con punto
doppio.



$y = x^3$ ha punti doppi?

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 x_2 - x_1^3$$

$x^3 = a \rightarrow 3 \text{ radici cubiche di } a \begin{cases} 1 \in \mathbb{R} \\ 2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \beta \rightarrow 1 \text{ radice} \\ x = \beta \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

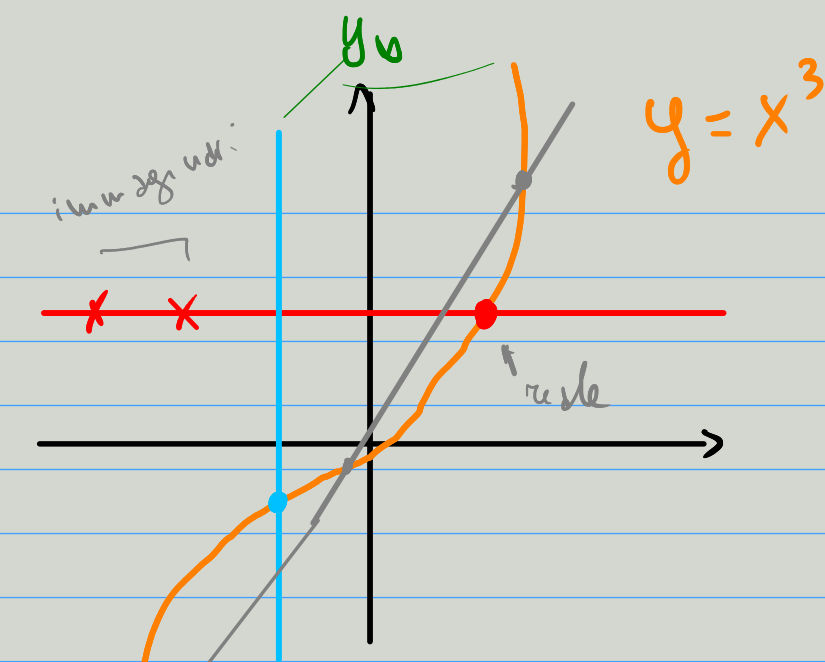
$$P = [(0 \ 1 \ 0)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 x_2 = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$



$$\begin{cases} y = x^3 \\ x = \beta \end{cases}$$

$$\rightarrow y = \beta^3$$

una sola radice

ma le intersezioni per il
teorema dell'ordine devono
essere 3 $\Rightarrow$ le altre?

→ stanno all'infinito e devono
appartenere al pto improprio di

$x = \beta \Rightarrow$ il punto imp. di $x = \beta$ è un punto doppio

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \beta \end{cases}$$

$$\rightarrow x^3 = \beta$$

3 radici
1 reale
2 im. coniug.

↓
OK teorema d.
ordine.

$$f(x, y) = 0$$

$$\deg f = n$$

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \rightarrow f(x, y) = F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$$

$$f(x, y) \rightarrow F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^n f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

so wo F man schreiben
ein Polynom!

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 + 3x + 5 + xy$$

$$x_3^3 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = x_3^3 \left(2 \frac{x_1^2}{x_3^2} + \frac{x_2^3}{x_3^3} + 3 \frac{x_1}{x_3} + 5 + \frac{x_1 x_2}{x_3^2} \right) =$$

$$= 2 \cancel{x_1^2 x_3} + \cancel{x_2^3} + 3 \cancel{x_1 x_3^2} + 5 \cancel{x_3^3} + \cancel{x_1 x_2 x_3}$$

e poniamo $x = \frac{x_1}{x_3}$ $y = \frac{x_2}{x_3}$ ~~$x_3 =$~~

rioterremo l'eq di partenza.

Euclides

luogo geometrico

Dato un punto $P \equiv (x_0, y_0)$ ed $r > 0$ considerare
il luogo geometrico dei punti a distanza r_0 da P

$$Q = (x, y)$$

$$d(P, Q)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

CIRCONFERENZA
DI CENTRO P e
RAGGIO r_0

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$$



OSSERVA CHE SI HA UNA EQ DI II GRADO

→ è una conica.

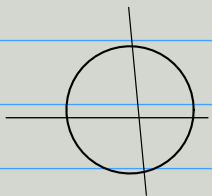


in particolare possiamo studiare l'eq. omogenea associata
e vedere come sono fatti i punti impropri.

$$\begin{cases} (x_1 - x_0 x_3)^2 + (x_2 - y_0 x_3)^2 = r_0^2 x_3^2 & \text{eq. omogenea} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

$$J_\infty \quad \bar{J}_\infty$$



↗ i punti impropri di una circonferenza
↓ tangente a $\mathbb{R}P^2$ sono

$$J_\infty = [(1, i, 0)] \quad \bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$$

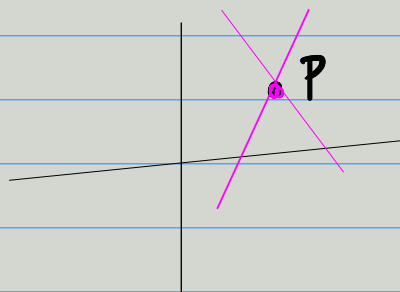
Punti ciclici del piano

(sono 2 punti immaginari!)

↓

NON HANNO COORDINATE REALI

N.B cosa succede se $r_0 = 0$



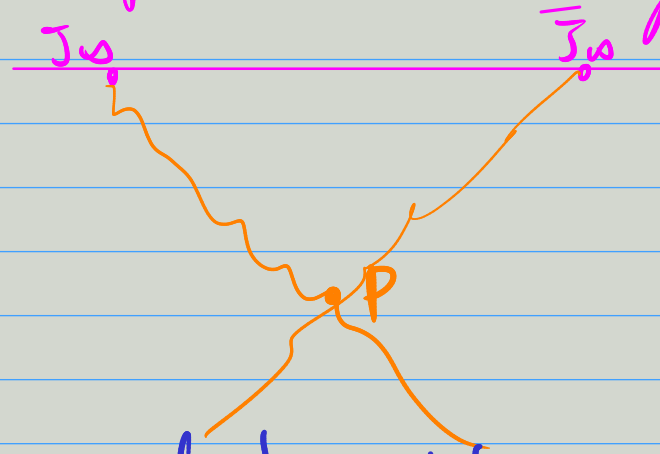
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$

$$P \equiv (x_0, y_0)$$

OSSERVIAMO CHE SU $\mathbb{C}$ il polinomio si fattorizza

come $[(x-x_0) + i(y-y_0)][(x-x_0) - i(y-y_0)] = 0$

$\Rightarrow$ la "circonferenza" (generalizzata) è l'unione di 2 rette passanti per P e rispettivamente J_{∞} e $\bar{J}_{\infty}$



Def: Una curva algebrica del II ordine ^{conico} è detta circonferenza generalizzata se è reale e passa per i punti J_{∞} e $\bar{J}_{\infty}$.

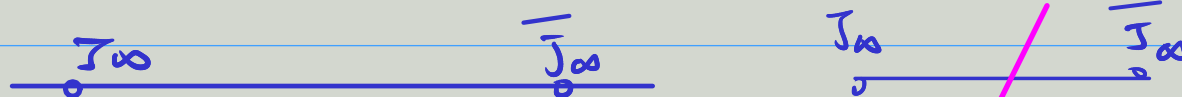
oss: Ogni circonferenza è una circonferenza generalizzata.

In generale una circ generalizzata ha
eq. $k[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] = r^2$ con $k \neq 0$

oppure $x_3^2 = 0$

oppure $x_3(2x_1 + 3x_2 + 4x_3) = 0$

CONGENE



$x^2 + y^2 = -1$

è una circonferenza generalizzata
priva di punti reali.

LUOGO
GEOMETRICO
(reale)

EQUAZIONE
REALE

PUNTI
IMPROPRI

GENERALIZZATO PER
POTER STUDIARE LA CURVA

l'insieme dei punti equidistanti da 2 punti assegnati

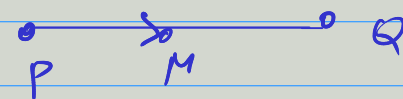
$$P = (x_0, y_0) \quad Q = (x_1, y_1)$$

$$R \text{ tali che } d(P, R) = d(Q, R)$$

Def: Siano P e Q due punti distinti in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

1) si dice punto medio fra P e Q il punto M

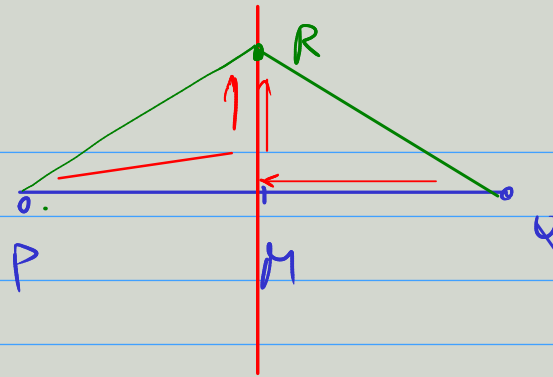
$$\text{tale che } \vec{PM} = \vec{MQ}$$



$$\text{in particolare } \vec{PM} = \frac{1}{2} \vec{PQ}$$

2) si dice asse del segmento di estremi P e Q

la retta passante per il punto medio fra P e Q
ed ortogonale alla direzione $\vec{PQ}$



Teorema: Il luogo dei punti equidistanti da P e Q
 è l'asse del segmento PQ

DIM: Sia R tale che $d(P, R)^2 = d(R, Q)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{RQ}\|^2 = \|\vec{QR}\|^2$$

$$\vec{PR} = \vec{PM} + \vec{MR}$$

$$\vec{QR} = \vec{QM} + \vec{MR}$$

con M punto medio fra
P e Q

$$\|\vec{PR}\|^2 = (\vec{PM} + \vec{MR}) \cdot (\vec{PM} + \vec{MR}) = \boxed{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 + 2\vec{PM} \cdot \vec{MR}}$$

$$\|\vec{QR}\|^2 = (\vec{QM} + \vec{MR}) \cdot (\vec{QM} + \vec{MR}) = \|\vec{QM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 + 2\vec{QM} \cdot \vec{MR} =$$

$$= \|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 - 2 \vec{PM} \cdot \vec{MR} =$$

$$= \boxed{\|\vec{PM}\|^2 + \|\vec{MR}\|^2 - 2 \vec{PM} \cdot \vec{MR}}$$

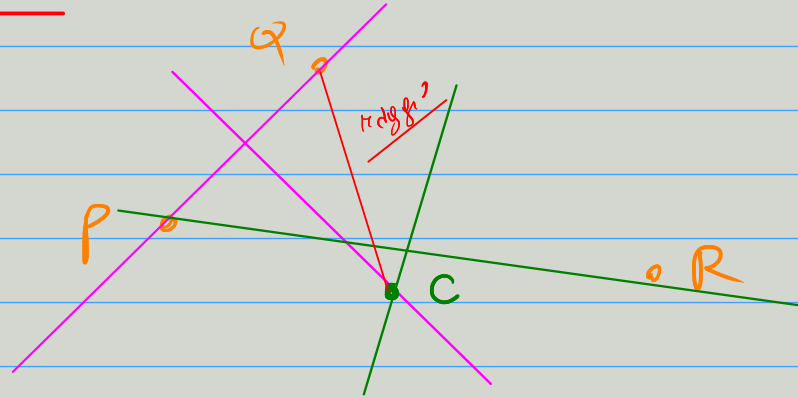
$$\Rightarrow \|\vec{PR}\|^2 = \|\vec{QR}\|^2 \Leftrightarrow 2 \vec{PM} \cdot \vec{MR} = -2 \vec{PM} \cdot \vec{MR} \Leftrightarrow$$

$$4 \vec{PM} \cdot \vec{MR} = 0$$

Quindi R è equidistante da P e $Q \Leftrightarrow$
 il vettore $\vec{MR}$ è ortogonale a $\vec{PM}$ (e dunque
 a $\vec{PQ}$) $\Rightarrow$

R è equidistante da P e $Q \Leftrightarrow R$ appartiene
 all'asse del segmento P, Q . $\square$

CIRCONFERENZA FRA 3 PUNTI.



Se avete le eq. $\Rightarrow$ sistema in 5 incognite che
si ottiene imponendo il passaggio per P, Q, R
e $J_\infty, \bar{J}_\infty$ (5 equazioni)

5 eq., 6 incognite $\Rightarrow \infty$ soluzioni
 $\Rightarrow$ 1 classe di autsol.

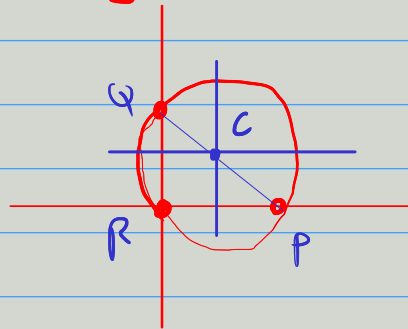
Circonferenza per 3 punti non allineati P, Q, R

↓
conica per $P, Q, R, J_\infty, \bar{J}_\infty$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 \ 0 \ 1) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (0 \ 1 \ 1) \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (0 \ 0 \ 1) \end{pmatrix}$$



$$J_\infty = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{J}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

ALGEBRA

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0 \\ a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{11} + 2ia_{12} - a_{22} = 0 \\ a_{11} - 2ia_{12} - a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_{33} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{11} = -2a_{13} \\ a_{22} = a_{11} \\ a_{22} = -2a_{23} \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}_{11} = 1$$

$$x_1^2 - 2\frac{1}{2}x_1x_3 + x_2^2 - 2\frac{1}{2}x_2x_3 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + y^2 - 2\frac{1}{2}y = 0 \rightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$$

C = centro della circonferenza e asse fr

R e Q $\rightarrow$ retta $y = \frac{1}{2}$

e asse fr R e P $\rightarrow$ retta $x = \frac{1}{2}$

$$C \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Il raggio r è $r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - x + y^2 - y = 0$$