

Teorema dell'Ordine

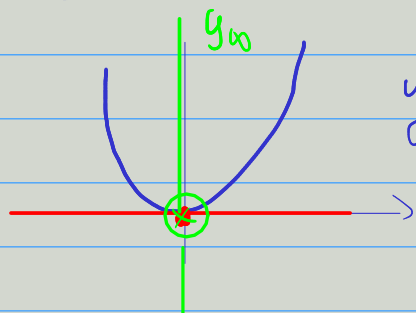
$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ove F polinomio omogeneo
non costante di grado n
in x_1, x_2, x_3

1) Lavoriamo in ambito ampliato

2) Il campo è algebricamente chiuso $\rightarrow$ ogni equazione di grado $n \geq 1$
in una incognita ha esattamente
 n soluzioni (non necessariamente
distinte).

3) Le intersezioni sono contate con le dovute molteplicità.



$$y = x^2$$

$$\text{in } A_2(\mathbb{C})$$

$$y = 0$$

$x = 0$ con mult.
algebraica della sol = 2

N.B.

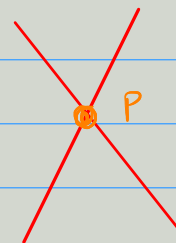
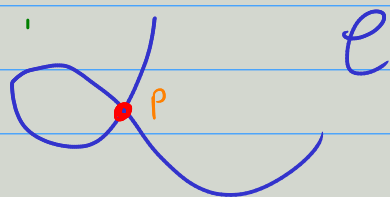
$$x = 0$$

$\rightarrow$ DOBBIAMO RAGIONARE IN AMBITO AMPLIATO.

$$\begin{cases} X_3 X_2 - X_1^2 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases} \rightarrow X_3 X_2 = 0 \begin{cases} \nearrow [(0, 1, 0)] = y_\infty \\ \searrow [(0, 0, 1)] = 0 \end{cases}$$

Def: Sia C una curva algebrica (piana). Si dice che un punto P è r_0 -uplo su C se ogni retto per P interseca C in P almeno r_0 -volte ed esistono esattamente r_0 retti* per P che intersecano C in P (r_0+1) volte.

*contate con le debite molteplicità.

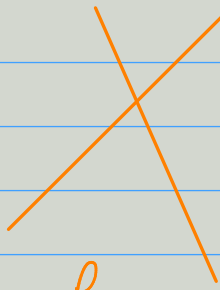


$r_0=2 \rightarrow$ punto doppio

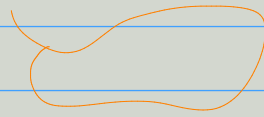
Def: Una curva algebrica C è detta riducibile se

$C = C_1 \cup C_2$ è unione propria di due curve algebriche C_1 e C_2 con $C_1, C_2 \neq C$.

C è irriducibile se C non è riducibile.



C
riducibile



oss. Una curva C è riducibile su di un campo alg. chiuso se e solo se dimessa

$F(x_1, x_2, x_3) = 0$
l'eq. di C si ha

$$F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3) H(x_1, x_2, x_3).$$

con $\deg G, H \geq 1$

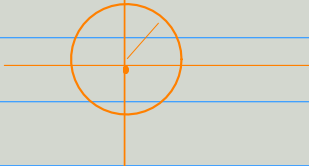
$$\text{Se } F(x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_3) H(x_1, x_3) \Rightarrow$$

$$V(F) = V(G) \cup V(H)$$

perché ogni punto che annulla F deve annullare o G o H .

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \text{ è riducibile?}$$

$\swarrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

$x^2 + y^2 = 1$


$x^2 + y^2 = -1$

in $A_2(\mathbb{R})$? sì
in $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$

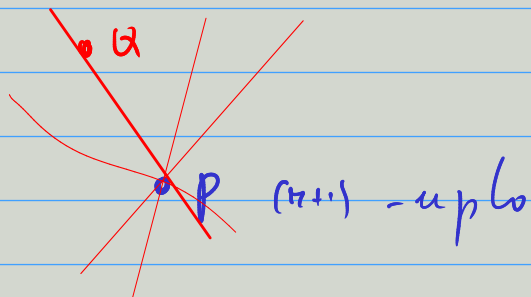
RIDUCIBILITÀ = FATTORIZZABILITÀ DELL'EQUAZIONE

Teorema: Una curva di ordine n non ha punti $(n+1)$ -upli.

Se una ha 1 punto n -uplo $\Rightarrow$ si spezza
(= si riduce) nell'unione di n rette per quel punto.

DIM:

Sia C una curva di ordine n_0
e supponiamo per assurdo $P \in C$ punto $(n+1)$ -uplo



ha curva C in seguito alg. chiuso non può né
ridursi ad un solo punto né occupare tutto il piano]

Sia $Q \in \widetilde{A_2(K)}$ con $Q \neq P \Rightarrow$ la retta QP

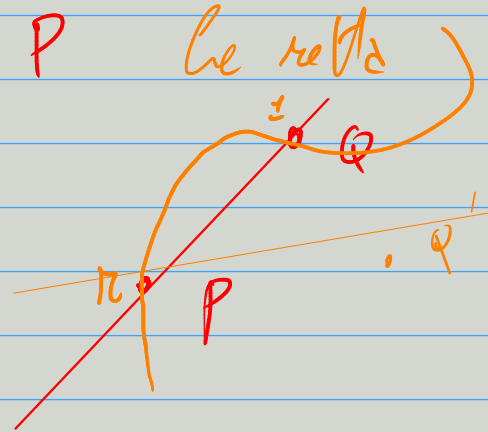
interseca C almeno (n_0+1) volte con $(n+1) > n_0$

(tutte in P) $\Rightarrow$ per il Teorema dell'ordine C contiene n_0
per ogni retta per $P \Rightarrow C$ contiene tutti i punti

del piano $\Rightarrow$ ASSURDO. $\Downarrow \Rightarrow$ non ci sono punti $(n+1)$ -upli.

Supponiamo $P \in C$, P punto $\mathbb{A}^1$ -uplo e $\mathbb{A}^1$
algebricamente chiuso.

$\Rightarrow \forall Q \in C$ con $Q \neq P$ la retta PQ è
contenuta in C in
quanto interseca C in
almeno $n+1$ punti.



e dunque lo è per il teorema dell'ordine.

Ne segue che C è unione di rette per P .

Poiché la curva C ha grado n questo significa
che la sua eq. deve essere prodotto delle

equazioni di n termini di primo grado $\Rightarrow C$
è unione di n rette per P (non nec. distinte). $\square$

Exempio

$K = \mathbb{R}$ e prendiamo la curva

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$$

// su $\mathbb{R}$ non si fattorizza
in $\mathbb{C}$ si

$$C = \{ (2, 3) \} \quad \text{in } A_1(\mathbb{R})$$

$$[(2, 3, 1)] \quad \text{in } \widetilde{A_1(\mathbb{R})}$$

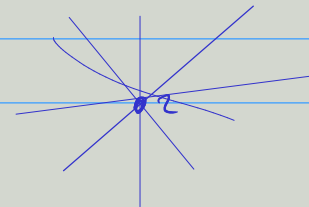
$P = (2, 3)$ è un punto doppio

Ma in fatti $\alpha(x-2) + \beta(y-3) = 0$ una retta per P e viceversa

$\Rightarrow$ la retta interseca C solamente in P in $\widetilde{A_1(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow$ la retta interseca C 2 volte in P

$\Rightarrow P$ è doppio.



Dove sono le RETTE COMPONENTI C ?

sono in $\widetilde{A_1(\mathbb{C})}$

$$[(x-2) + i(y-3)][(x-2) - i(y-3)] = 0$$

↓
 $\mathbb{R}$

↓
 $\overline{\mathbb{R}}$

Perché ci interessa lavorare su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$??

Su $\mathbb{R}$ abbiamo la geometria euclidea "classica" e $\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$.

1) Su $\mathbb{R}$ possiamo introdurre la nozione di distanza euclidea / ortogonalità / angoli / etc con cui siamo familiari.

- 1) $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow$ in $\mathbb{C}$ possiamo studiare bene le curve algebriche.
- 2) Vorremo ragionare in $\mathbb{C}$ ma riconoscere i punti "reali" di una geometria su $\mathbb{R}$

GEOMETRIA EUCLIDEA

Def Una geometria euclidea $E_n(\mathbb{R}) = EG_n(\mathbb{R})$ è una geometria affine $A_n(\mathbb{R}) = (A, V_n^0(\mathbb{R}), f)$ ove $V_n^0(\mathbb{R})$ è uno s.v. euclideo, cioè uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Siriverà anche $A_n^0(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$.

Def : Si dice riferimento cartesiano (o riferimento euclideo)

in $E_n(\mathbb{R})$ un riferimento affine $\Pi = (O, \mathcal{B}^o)$
ove $\mathcal{B}^o$ è una base ortonormale di $V_n^o(\mathbb{R})$.

oss: Rispetto $\mathcal{B}^o$ il prodotto scalare di $V_n^o(\mathbb{R})$

si scrive

$$(x_1 \text{ --- } x_n) \cdot (y_1 \text{ --- } y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \text{---} + x_n y_n$$

DEF: In $E_n(\mathbb{R})$ si dice distanza fra due punti
 $P, Q \in A$ il valore

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\| \in \mathbb{R}^+$$

oss immediate

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{PQ}\| = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

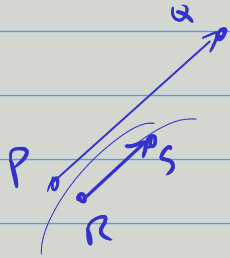
$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|-\vec{PQ}\| = \|\vec{QP}\| = d(Q, P)$$

$$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$$

$$\|\vec{PQ}\| + \|\vec{QR}\| \geq \|\vec{PQ} + \vec{QR}\| = \|\vec{PR}\|$$

N.B.: La distanza è definita come un numero reale ≥ 0 ; non in termini di "unità di misura".

$$\text{Se } \vec{PQ} = \alpha \vec{RS} \Rightarrow \|\vec{PQ}\| = |\alpha| \|\vec{RS}\| \quad \frac{\|\vec{PQ}\|}{\|\vec{RS}\|} = |\alpha|$$



Def: In $E_n(\mathbb{R})$ siano $\Pi = [P; W]$, $\Pi' = [P'; W']$
due sottospazi lineari.

Si dice che $\Pi \perp \Pi'$ (Π e Π' sono ortogonali)
se vale una delle seguenti due condizioni

$\begin{matrix} (P1) \rightarrow \\ (P2) \rightarrow \end{matrix}$	$\underline{W} \subseteq W'^{\perp} \quad \text{oppure}$ $W^{\perp} \subseteq W'$	$W' \subseteq W^{\perp} \quad \text{oppure}$ $W'^{\perp} \subseteq W$
	equiv.	

(P1) $\rightarrow$ Tutti i punti impropri di π = direzioni contenute nel
 sott. di traslazione di π sono
 ortogonali a tutte le direzioni di W'

(P2) $\rightarrow$ Tutte le direzioni ortogonali alle direzioni di π
 sono contenute nell'insieme dei punti impropri di W'

Casi particolari $n=2$ rette

$$\pi = [P, W_\pi] \quad \pi' = [P', W'_\pi]$$

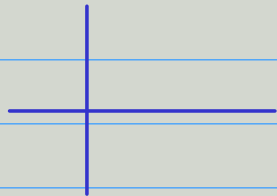
due rette

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow W_\pi \subseteq (W'_\pi)^\perp$$

$$\text{ma } \dim(W_\pi) = 1 = \dim(W'_\pi)^\perp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_\pi = (W'_\pi)^\perp$$

$$\text{Inoltre } W_\pi^\perp = W'_\pi$$

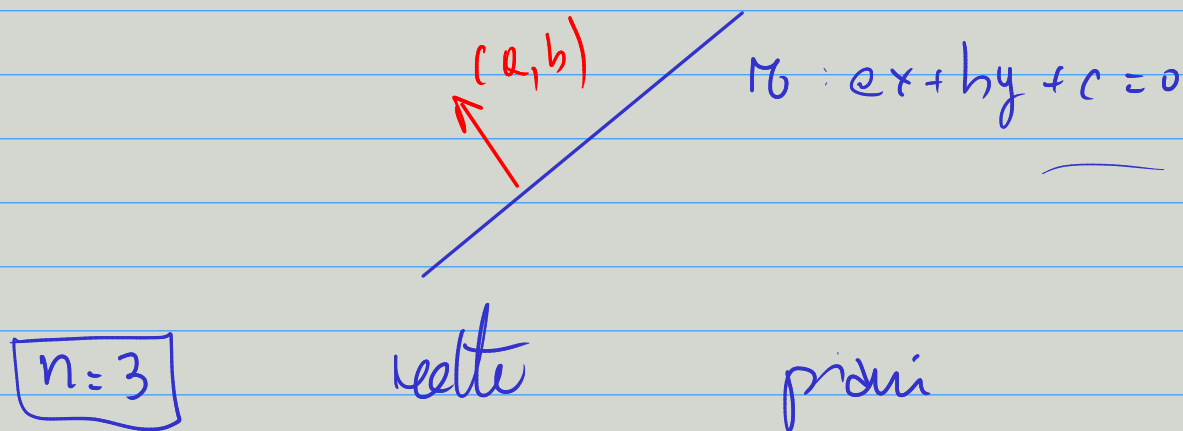


Due rette in $E_2(\mathbb{R})$ sono ortogonali $\Leftrightarrow$ le
 loro direzioni sono ortogonali.

$$r: ax + by + c = 0 \quad \text{RETTA}$$

$$W_1 = \{ (l, m) \mid al + bm = 0 \} = (a, b)^\perp$$

quindi la direzione di tutte le rette
 ortogonali ad r è $W_1^\perp = (a, b)^{\perp\perp} = L((a, b))$



$n=3$

N.B. $n=2$: dato un punto
 o una retta r , retta
 o con $P \in r$, $s \perp r$
 $s = [P, L((a, b))]$

$$\tau_0 = [P, W_1]$$

$$\pi = [Q, W_2]$$

$$\tau' = [P', W_1']$$

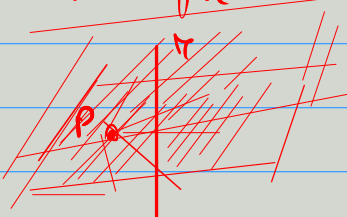
$$\pi' = [Q', W_2']$$

$$\tau \perp \tau' \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_1'^{\perp} \text{ oppure }$$

~~$$W_1^{\perp} \subseteq W_1'$$~~

$$\dim(W_1^{\perp}) = 2$$

$$\dim(W_1') = 1$$



N.B. Dato un punto P

ed una retta τ_0 , l'unione di

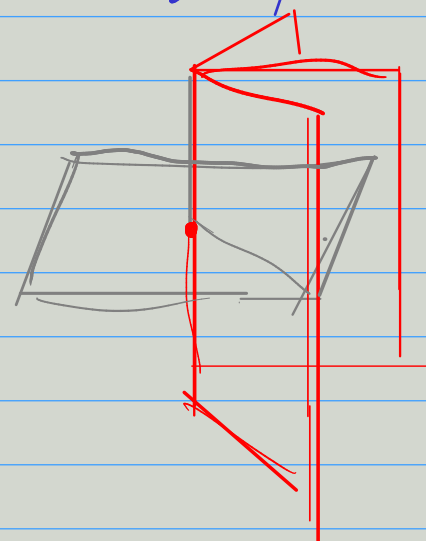
tutte le rette per P ortogonali
ad τ_0 forma un piano

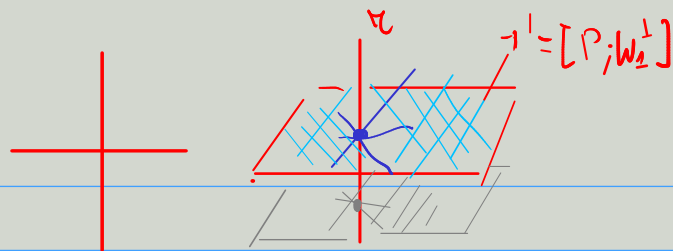
$$\Sigma = [P, W_2^{\perp}]$$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow W_2 \subseteq W_2'^{\perp} \text{ oppure }$$

~~$$W_2^{\perp} \subseteq W_2'$$~~

$$\dim W_2 = 2; \dim W_2'^{\perp} = 1$$





Le rette di un piano sono ∞^2

↓
le rette sono in
corrispondenza 1-1

con le classi di
prop con coeff.

non nulli $[(a, b, c)] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \end{array}$$

c'è una biiezione fra rette
del piano e punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$
e questi sono gli ∞^2 pt.
del piano ampliato.

i piani in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$

sono in corr. con

le eq. del tipo acheno
di prop

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = 0$$

↓
con le classi $[(a, b, c, d)]$
 $\in \mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$

punti di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4) \iff$ piani di $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$

$(a, b, c, d)^\perp \rightarrow$ piano

$\{ \pi \}^\perp \rightarrow$ punto

Le rette nello spazio?

Formano anche esse un sottospazio proiettivo? No

Le rette nello spazio corrispondono ai punti di una quadrica (quadrica di Klein) in dimensione proiettiva 5.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} =$$

$$v \rightarrow \left[\left(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} \right) \right]$$

$$\in \mathbb{P}(\mathbb{K}^6)$$

Due piani sono ortogonali $\Leftrightarrow W_1^\perp \subseteq W_2'$

Supponiamo π abbia equazione

$$\pi \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_n = 0$$

$$\pi' \quad a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_n = 0$$

W_1 soddisfa

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

$$W_1 = (a \ b \ c)^\perp$$

$$W_1^\perp = (a \ b \ c)^{\perp\perp} = \mathcal{L}((a, b, c))$$

deve essere affinché $\pi \perp \pi'$

$$\mathcal{L}((a, b, c)) \subseteq W_1'$$

$$a'a + b'b + c'c = 0$$

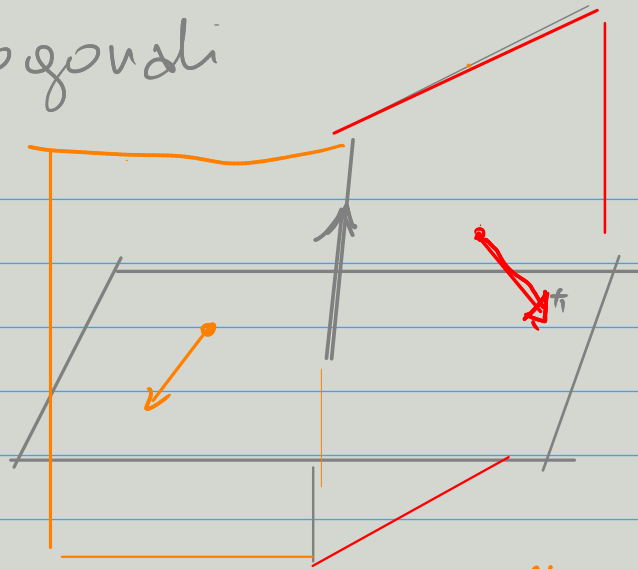
$$= ((a', b', c'))^\perp$$

$$\text{cioè } (a \ b \ c) \cdot (a' \ b' \ c') = 0$$

La direzione $[(a, b, c)]$ è detta direzione
normale a π .

Due piani sono ortogonali $\Leftrightarrow$ le loro direzioni

normali sono ortogonali



Infine : dato $\ell_0 = [P, W_0]$ una retta e
 $\pi = [Q, W_2]$ un piano.

$$\ell_0 \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad W_1 \subseteq W_2^\perp \rightsquigarrow \dim W_2^\perp = 1 = \dim W_1$$

oppure

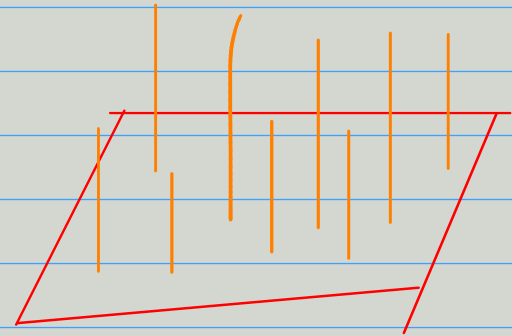
$$W_1^\perp \subseteq W_2 \rightsquigarrow \dim W_1^\perp = 2 = \dim W_2$$

$$\Rightarrow W_1^\perp = W_2$$

sono equivalenti

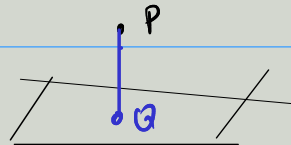
In particolare una retta è ortogonale ad un
 piano $\Leftrightarrow$ ha la direzione normale al piano

→ le rette ortogonali ad un piano formano una stella impropria di rette.



PROD. SCALARE
 ↙ ↘
 DISTANZA EUCLIDEA. ORTOGONALITÀ

Def Sia $P \in E_n(\mathbb{R})$ un punto e
 $\pi = [Q, W]$ un sottospazio
 lineare. Si dice proiezione ortogonale
 di P su π il punto $Q \in \pi$ tale
 che $\overrightarrow{PQ} \perp W$.



IN TEORIA DI FUNZIONI
 DISTANZA FRA 2 PUNTI DI $E_n(\mathbb{R})$
 NE POSSIAMO DEFINIRE TANTE

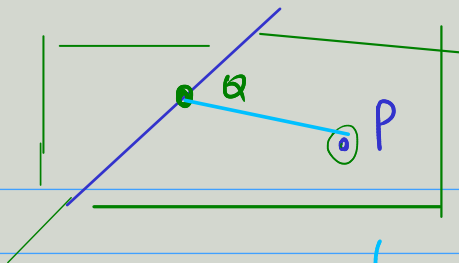
$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| \quad \begin{matrix} P = (x_1, \dots, x_n) \\ Q = (y_1, \dots, y_n) \end{matrix}$$

$$d_H(P, Q) = \# \{i \mid x_i \neq y_i\}$$

$$\Rightarrow d_r(P, Q) = \max \{|x_i - y_i|, i\}$$

$$\Rightarrow d(P, Q) = \sum_n |x_i - y_i|$$

etc etc etc.



La proiezione ortogonale è l'abbiezione

$$\Pi \cap [P; W^\perp]$$

Oss $|\Pi \cap [P; W^\perp]| = 1$

perché $(W^\perp \oplus W = V_m^0(\mathbb{R}))$.

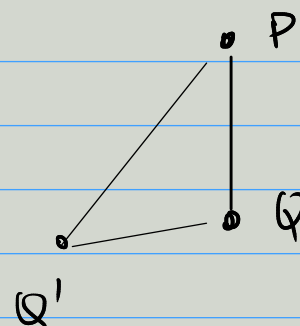
quando scrivete il sistema di eq. avete un sistema lineare di ordine con n equazioni in n incognite.

$(n-k)$ eq. vengono da Π -

$(k = n - (n-k))$ vengono da $[P; W^\perp]$

Teorema: La proiezione ortogonale di P su Π è il punto $Q \in \Pi$ più vicino (in distanza euclidea) a P .

Dim.



Supponiamo $Q' \in \Pi$ e

$$\text{calcoliamo } d(P, Q')^2 = \|\vec{PQ'}\|^2 =$$

$$= \vec{PQ'} \cdot \vec{PQ'} =$$

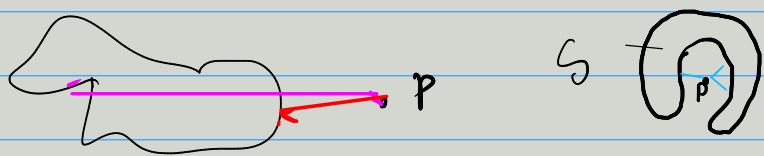
$$= (\vec{PQ} + \vec{QQ'}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{QQ'}) =$$

$$= \|\vec{PQ}\|^2 + \|\vec{QQ'}\|^2 + 2\vec{PQ} \cdot \vec{QQ'} =$$

Def. Si dice distanza di un punto P da un sottoinsieme $S \subseteq E_n(\mathbb{R})$ il minimo delle distanze $d(P, X)$ con $X \in S$

$$d(P, S) = \min \{d(P, X) \mid X \in S\}$$

In particolare $d(P, S) = 0 \Leftrightarrow P \in S$



Valo

Più in dettaglio se $S = [Q, W]$

$$\Rightarrow d(P, S) = \|\vec{PQ}\| \text{ ove } Q \text{ è la proiezione ortogonale di } P \text{ su } S$$

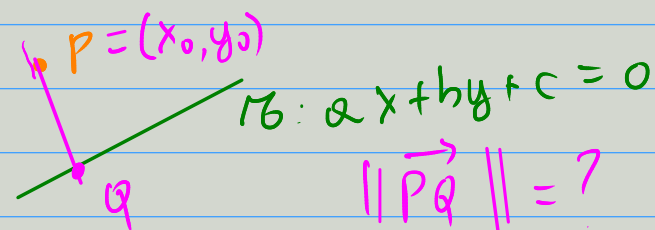
ma per ipotesi $\vec{PQ} \perp \vec{QQ'} \in W$

$$\Rightarrow * = \|\vec{PQ}\|^2 + \|\vec{QQ'}\|^2 \geq \|\vec{PQ}\|^2$$

(è uguale $\Leftrightarrow Q = Q'$)

□

Formula della distanza
punto/retta in $E_2(\mathbb{R})$

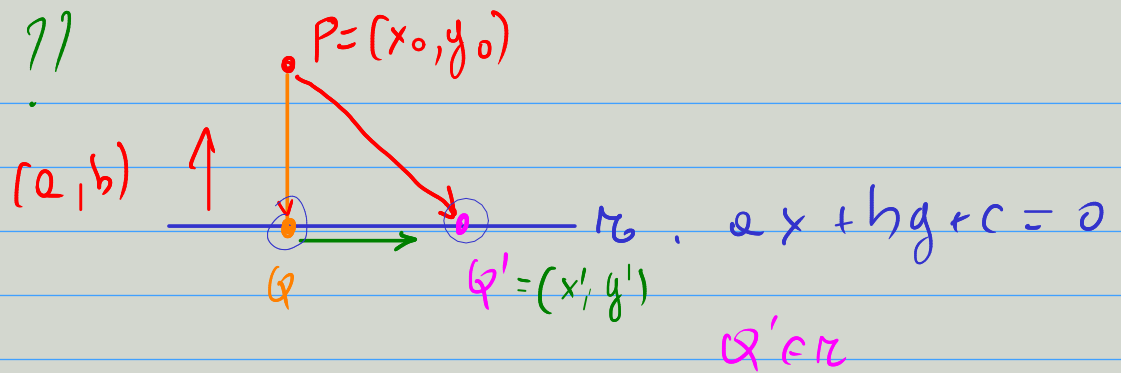


1) prendiamo P , calcoliamo $r \perp r$ passante per P .

2) Troviamo $Q = r \cap r$

3) Calcoliamo $\|\vec{PQ}\|$

C'è un modo più veloce??



il vettore $\vec{PQ}$ è esattamente la proiezione nella direzione
ortogonale alla retta r del vettore $\vec{PQ'}$

$$\vec{PQ} = \frac{\vec{PQ'} \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} (a, b)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{PQ}\| &= \left| \frac{\vec{PQ'} \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} \right| \|(a, b)\| = \frac{|\vec{PQ'} \cdot (a, b)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{|((x' - x_0), (y' - y_0)) \cdot (a, b)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax' + by' - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} *$$

osservo che $\varphi' \in \mathcal{C} \Rightarrow ax' + by' + c = 0 \Rightarrow -c = ax' + by'$

$$* = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

oss: Essattamente lo stesso ragionamento funziona anche per la distanza punto/iperpiano in $E_n(\mathbb{R})$

$$\Pi : a_1 x_1 + \text{---} + a_n x_n + b = 0 \quad \text{iperpiano}$$

$$P \equiv (x'_1 \text{---} x'_n) \quad \text{punto}$$

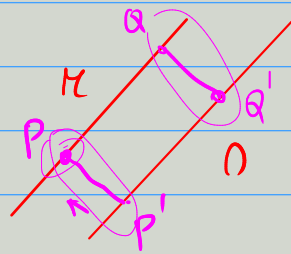
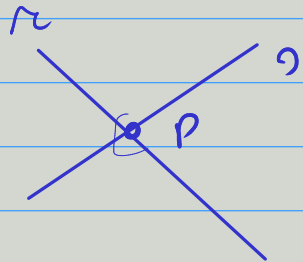
$$d(P, \Pi) = \frac{|a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + \text{---} + a_n x'_n + b|}{\sqrt{\sum_i a_i^2}}$$

In generale si può parlare di distanza fra 2 sottospazi?

"No", a meno che i 2 sottospazi non siano disgiunti.

La nozione che vorremmo dare è

$$d(\Pi, \Sigma) = \min \{ d(P, Q) \mid P \in \Pi, Q \in \Sigma \}$$



Se le rette sono
parallele $\Rightarrow$
 $d(\pi, \sigma) = d(P, \sigma)$

$\forall P \in \pi$

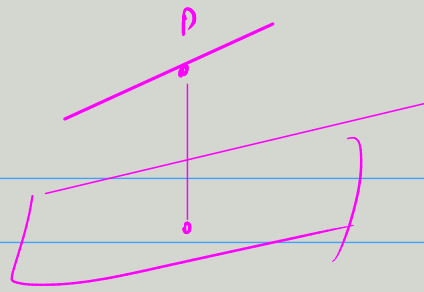
$$\vec{PQ} \parallel \vec{P'Q'}$$

$$\vec{P'P} \parallel \vec{Q'Q}$$

Nello spazio:

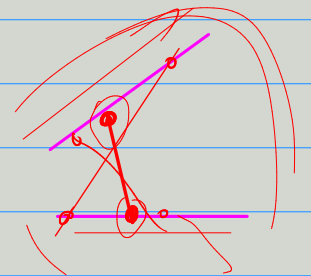
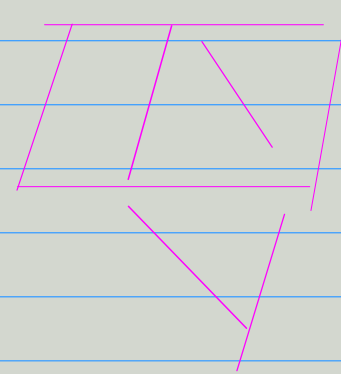
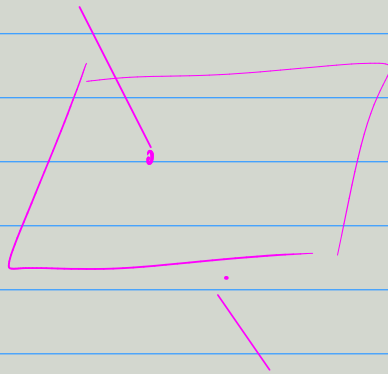
distanza punto/piano $\rightarrow OK$

distanza retta/piano con retta $\parallel$ piano $\rightarrow OK$



distanza piano/piano ove i piani sono
paralleli $\rightarrow$ ok

(distanza fra un punto su di un
piano e l'altro piano).



DISTANZA FRA 2 rette sghembe $\rightarrow$ è definita

Def.: Siano r_0, s due rette sghembe in $E_3(\mathbb{R})$

$$r_0 = [P, V_0] \quad s = [Q, W_0] \quad V_0 \neq W_0$$

si dice retta di minima distanza fra r_0 ed s .

la retta t incidente sia r_0 che s

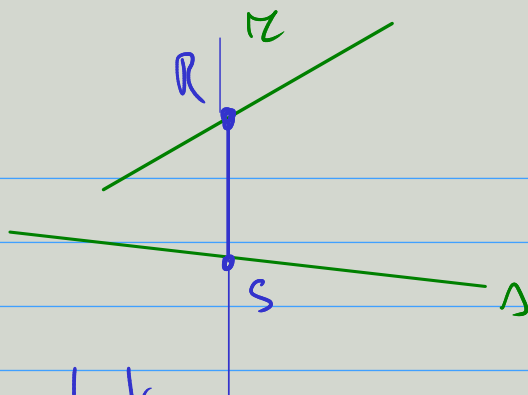
in punti $R = t \cap r_0$, $S = t \cap s$ tali che

$$\overrightarrow{RS} \in (V_0 \oplus W_0)^\perp.$$

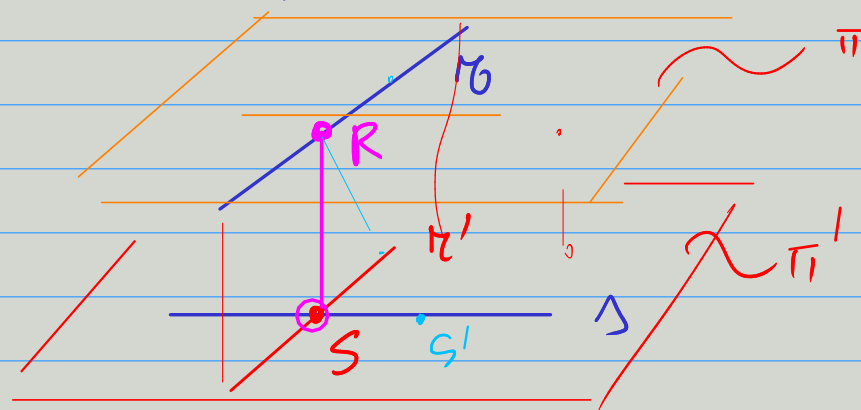
è una retta ortogonale sia ad r_0 che ad

s e incidente entrambe

Teorema: R ed S sono i 2 punti rispettivamente di
 r_0 ed s più vicini fra loro.



Dato per buono il lemma, noi abbiamo che $d(\pi, \Delta)$ è uguale alla distanza fra un qualsiasi punto di π e il piano per Δ parallelo via ad π che ad Δ .
 $\rightarrow$ è la distanza fra i 2 piani paralleli che contengono rispettivamente π ed Δ .



oss il punto di π più vicino a π' è individuato a distanza $\leq$ del punto di π più vicino ad un punto di π' .

MA OGNI PUNTO DI π è alla stessa distanza da π' perché i 2 piani sono paralleli $\rightarrow$ posso considerare la distanza di π da π' . Proietto la retta π ortogonalmente su π'

$\Rightarrow$ ottengo $\pi' \subseteq \pi'$. $\pi' \cap \pi \neq \emptyset$ perché $\pi' \perp \pi$.

chiamo S il punto di intersezione.

S avrà una proiezione $R \in \pi$.

OSSERVO CHE $\vec{RS}$ è ortogonale ad π e ad π' (perché è ortogonale a π e π'). inoltre

$\|\vec{RS}\|$ è uguale alla distanza dei punti di π dai punti di π' quindi è il minimo delle possibili distanze fra un punto di π ed un punto di π' .

e quindi $\vec{RS}$ congiunge proprio i punti a distanza minima. 