

$$A_n(K) \rightarrow \mathbb{P}(K^{n+1})$$

Se $K = \mathbb{R}$ abbiamo tante proprietà "usate"

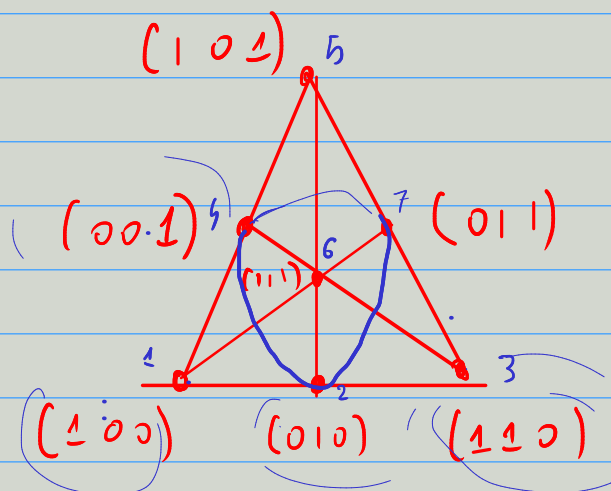
$$\text{Se } K = \mathbb{Q}$$

Se $K = \mathbb{Z}_2$ in $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3)$ due rette hanno sempre
 $\hat{=}$ punto di incontro.

$$\widetilde{A_2(\mathbb{Z}_2)}$$

avendo cose "chiave"

$\rightarrow$ ci sono
 esattamente 7 punti
 e ogni retta ha 3
 punti.



$$\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3) \quad \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \quad 1+1=0$$

rotto = triangolo rosso + cerchio blu

è un piano proiettivo detto
 piano di Fano.

In particolare noi vediamo che se vogliamo studiare

$\mathbb{P}(Z_3^3) \rightarrow$ ogni retta ha 4 punti
per ogni punto passano 4 rette

$$\frac{3^3 - 1}{3 - 1} = \frac{26}{2} = \underline{13 \text{ punti}}$$

GLACIURA = Sp. traslazione di un punto

DIREZIONE = Sp. traslazione di una retta.

Def. In $A_n(k)$ fissato un riferimento affine Γ

si dice ipersuperficie algebrica di ordine k
l'insieme di tutti i punti di $A_n(k)$ le cui
coordinate rispetto a Γ soddisfanno un'equazione
polinomiale non costante

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

con $\deg f = k$

Indichiamo con $V(f)$ l'insieme dei punti della ipersup. di eq. $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

$$V(x^2 + y^2 = -1) \neq \emptyset \text{ in } A_2(\mathbb{R}).$$

Le ipersuperfici e più in generale le varietà algebriche (= intersezione di ipersuperfici) sono associate a sistemi di eq. di grado ≥ 1

↓
il campo cont.!! In particolare l'ambiente "giusto" in cui studiarle è un campo algebricamente chiuso (ad. es. $\mathbb{C}$)

Def. Se $n=2$ una ipersup.^{algebraica} in $A_2(k)$ è detta curva algebrica (piana).

Se $k=1$ (= ordine 1) una ipersuperficie in $A_n(k)$ è un iperpiano. (descritta da 1 eq. di $\mathbb{I}$ grado)

Se $k=1, n=2 \rightarrow$ retta
 $k=1, n=3 \rightarrow$ piano

$k=2, n=2 \rightarrow$ coniche
 $k=2, n=3 \rightarrow$ quadriche

Dato una ipersup. in $A_n(k)$ di equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$
 e data eq. omogenea della stessa

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) := x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 0$$

L'iposuperficie proiettiva corrispondente in $TP(k^{n+1})$ è detta

avete eq. omogenea

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

I punti che soddisfanno $\begin{cases} F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$

sono detti punti impropri / punti all'infinito della ipersurf.

$$n=2 \quad ax+by+c=0 \quad \mapsto x_3 \left(a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c \right) = 0$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

$$\mapsto x_3^2 \left(a \frac{x_1^2}{x_3^2} + b \frac{x_2^2}{x_3^2} + c \frac{x_1 x_2}{x_3^2} + d \frac{x_1}{x_3} + e \frac{x_2}{x_3} + f \right) = 0$$

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1 x_2 + dx_1 x_3 + ex_2 x_3 + fx_3^2 = 0$$

$$\text{pt. impropri} \begin{cases} ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Def Un polinomio in cui tutti i monomi hanno il medesimo grado k è detto polinomio omogeneo di grado k .

DOMANDA: L'ordine di una curva ha un significato geometrico?

$$(y^2 = x^3) \text{ in } \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$$

$$y^2 - x^3 = 0$$

$$x_3x_2^2 - x_1^3 = 0$$

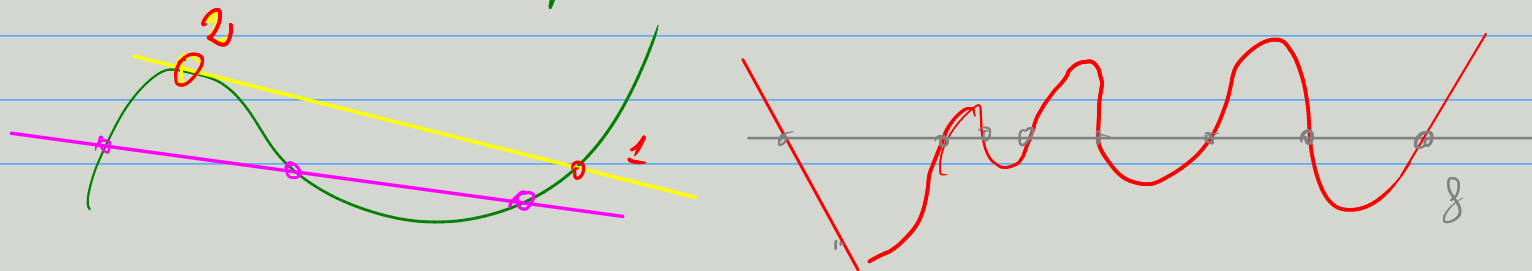
$$(y = e^x)$$

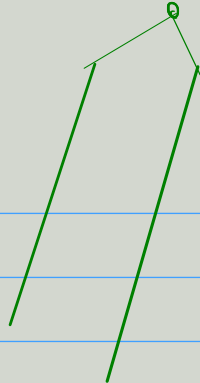
NON È UNA CURVA
ALGEBRICA

Teorema: Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso
(cioè tale che ogni polinomio in una variabile di grado ≥ 1 abbia almeno una radice, e quindi tutto, in $\mathbb{K}$).

e sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione omogenea
di una curva di ordine n in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$

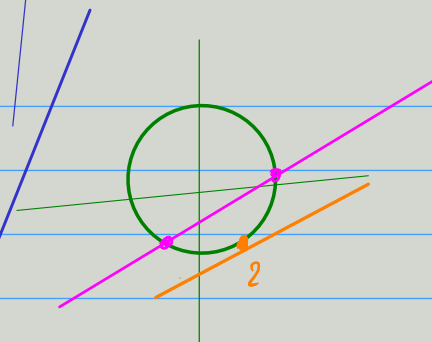
// Allora ogni retta del piano interseca C
in esattamente n punti (contati con la
debita molteplicità) e meno che la retta
non sia completamente contenuta in C .





$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$25 + y^2 = 1$$



$$y = \pm \sqrt{-24} \quad x = 5$$

$$(5, \pm i\sqrt{24})$$

DIM (sbagliata)

In $A_2(\mathbb{C})$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = ax + b \end{cases} \quad \deg f(x, y) = n$$

sostituire e studiare

$$\rightarrow f(x, ax + b) = 0 \quad \text{eq. di grado } n \text{ in } x$$

se $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso $\Rightarrow$
 ha n soluzioni $\rightarrow n$ punti di
 intersezione $?\square?$

dim (vera)

$F(x_1, x_2, x_3) = 0$ eq. della curva

$$L_0: \begin{cases} x_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1 \\ x_2 = \lambda x'_2 + \mu x''_2 \\ x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3 \end{cases}$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$$\text{ove } P \equiv [\lambda x'_1 \lambda x'_2 \lambda x'_3]$$

$$Q \equiv [\mu x''_1 \mu x''_2 \mu x''_3]$$

sono 2 punti distinti

METTIAMO A SISTEMA e sostituiamo in F

$$0 = F(\lambda x'_1 + \mu x''_1, \lambda x'_2 + \mu x''_2, \lambda x'_3 + \mu x''_3) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} \mu + \dots + a_n \mu^n = g(\lambda, \mu)$$

polinomio omogeneo di grado n
 in λ e μ .

1) $a_0 = a_1 = \dots = a_n \Rightarrow g(\lambda, \mu) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \Rightarrow$ ogni punto di τ_0 appartiene a $\mathcal{C}$.
 $\Rightarrow \tau \subseteq \mathcal{C}$ fine.

2) $a_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ innanzi tutto $[(\lambda, 0)]$ non è soluzione di $g(\lambda, \mu) = 0$ in fatti
 $g(\lambda, 0) = a_0 \lambda^n \neq 0$ se $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ per ogni soluzione valida deve essere $\mu \neq 0$.

Dunque dividiamo l'eq. $g(\lambda, \mu)$ per μ^n e otteniamo che dobbiamo risolvere l'eq.

non
omogeneo $\rightarrow a_0 t^n + \dots + a_n = 0$ con $t = \frac{\lambda}{\mu}$

per trovare i punti:

$$g(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow g\left(\frac{\lambda}{\mu}, 1\right) = 0 \quad \text{se } \mu \neq 0$$

$$\frac{(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} \mu + \dots + a_n \mu^n)}{\mu^n} = 0$$

$$a_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} + a_1 \frac{\lambda^{n-1}}{\mu^{n-1}} + \dots + a_n = 0 \quad t = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

polinomio di grado n in $t \rightarrow n$ soluzioni
in $\mathbb{K}$ alg. chiuso
 $\downarrow$
 n punti con la
debita molteplicità

3) Supponiamo $\downarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ e $a_k \neq 0$

$$(*) \quad g(\lambda, \mu) = a_k \lambda^{n-k} \mu^k + a_{k+1} \lambda^{n-k-1} \mu^{k+1} + \dots + a_n \mu^n =$$

$$= \boxed{\mu^k} \left(\underset{\neq 0}{a_k} \lambda^{n-k} + a_{k+1} \lambda^{n-k-1} \mu + \dots + a_n \mu^{n-k} \right)$$

OSSERVIAMO CHE $(*)$ ammette le classe

$[(1, 0)]$ come soluzione

k volte.

Il polinomio $\frac{g(\lambda, \mu)}{\mu^k}$ è omogeneo in λ e μ

di grado $n-k$ e il termine
in λ^{n-k} ha coeff $a_k \neq 0$

$\Rightarrow$ si applica esattamente lo stesso ragionamento

che al punto 2 e si vede che

$\frac{1}{\mu^k} g(x, \mu)$ ha $n-k$ soluzioni in $\mathbb{K}$

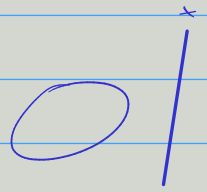
$$\Rightarrow \text{totale soluzioni} = \underbrace{k \text{ soluzioni}}_{\mu^k=0} + \underbrace{(n-k) \text{ soluzioni}}_{\frac{1}{\mu^k} g(x, \mu) = 0}$$
$$= n \text{ soluzioni} \quad \square$$

Se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso le intersezioni danno al più n .

Se partiamo da $\mathbb{R}$ ha senso considerare la geometria complessificata su $\mathbb{C}$ in quanto $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

oss. Mettiamoci su $\mathbb{R}$. In questo ambiente

1) il teorema dell'ordine non vale.



2) ci possono essere curve algebriche
prive di punti reali $x^2 + y^2 = -1$

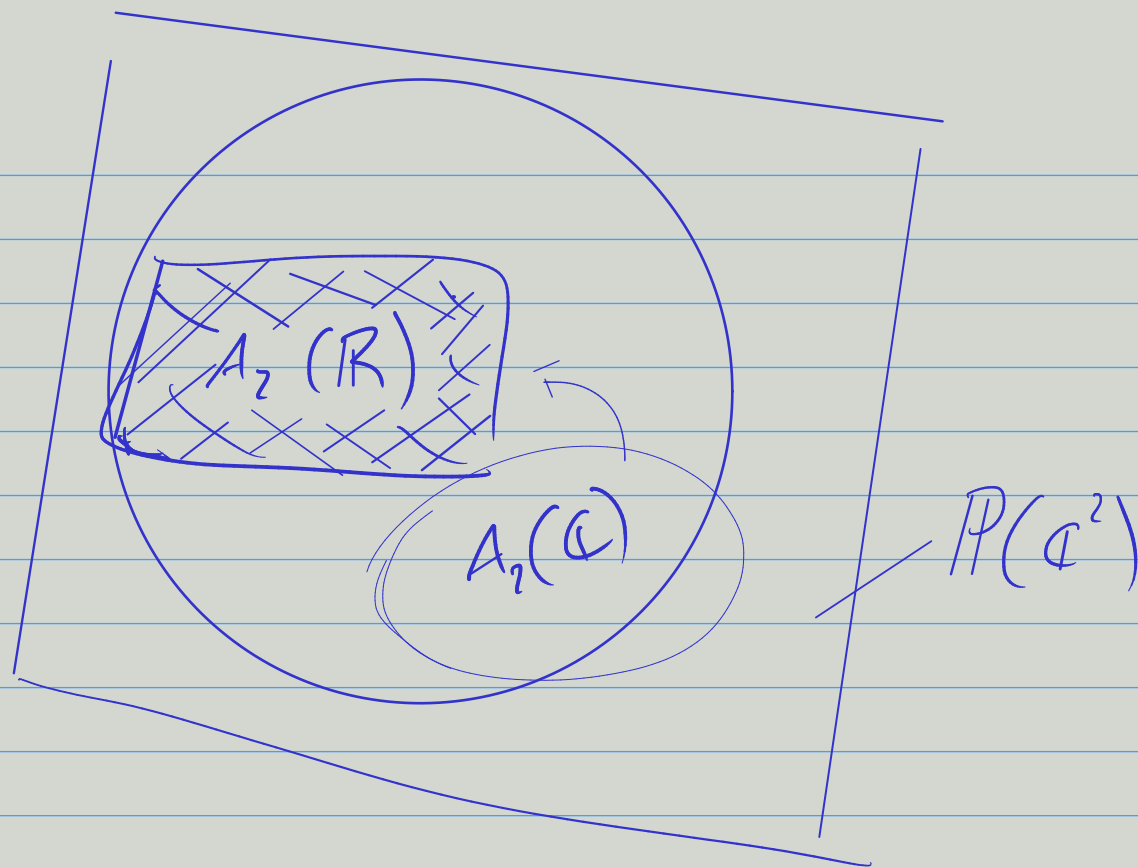
3) ci possono essere curve con eq. diverse
che hanno gli stessi punti e le eq. non
corrispondono ad oggetti equivalenti.

$$\begin{aligned} & \updownarrow \\ & (x + 2y + 3) = 0 \\ & (x + 2y + 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow (x^2 + y^2 = 0) \quad A_2(\mathbb{R})$$

$$x^6 + y^6 = 0 \quad A_2(\mathbb{R})$$

$$(x^2 + y^2)(x^6 + y^6) = 0$$



Spazi euclidei = spazi affini + prodotti scelti
 reali