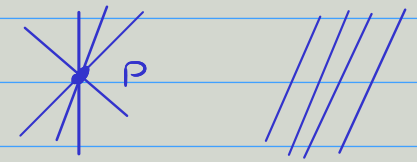
Fascio di
- rette in $A_2(\mathbb{K})$ — proprio
- piani in $A_3(\mathbb{K})$ — improprio



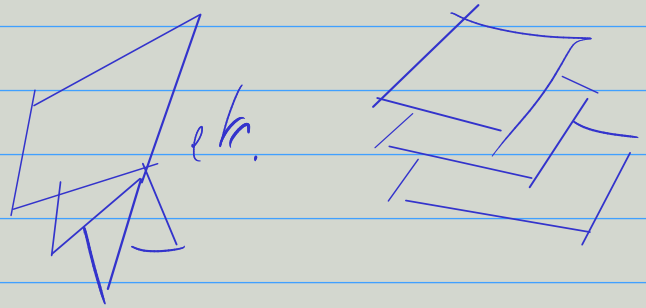
↓

insiemi di ∞^1 oggetti che soddisfano una "condizione lineare"

↓

→ i coeff delle eq. soddisfano 1 eq lineare omogenea per le rette in $A_2(\mathbb{K})$

→ 2 eq. lineari omogenee indip. in $A_3(\mathbb{K})$ per i piani



Def: In $A_3(\mathbb{K})$ si dice **stella propria**

→ di piani: l'insieme di tutti i piani per un punto P assegnato

→ di rette l'insieme di tutte le rette per un punto P assegnato

2) Stella impropria

→ di piani: l'insieme di tutti i piani che ci giacciono contiene una direzione assegnata

→ di rette: tutte le rette parallele ad una retta data

ESATTAMENTE COME PER I FASCI si verifica che gli elementi di una stella di piani sono ∞^2 i coeff delle cui equazioni sono soluzioni di una equazione lineare omogenea in 4 incognite a meno di prop. non nulla

Verificare che anche le stelle di rette sono formate da ∞^2 rette perché bisogna considerare sistemi equivalenti e non eq. prop.

→ Stella → ∞^2 oggetti che soddisfano una condizione "lineare"

Ampliamento proiettivo

In $A_n(\mathbb{K})$ $\quad \widetilde{A_n(\mathbb{K})}$ $\quad \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ $\quad \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$

diamo i seguenti nomi.

Chiamiamo "punti propri" i punti di A

chiamiamo "punti impropri" le direzioni di $V_n(\mathbb{K})$, cioè i sottospazi 1-dimensionali di $V_n(\mathbb{K})$.

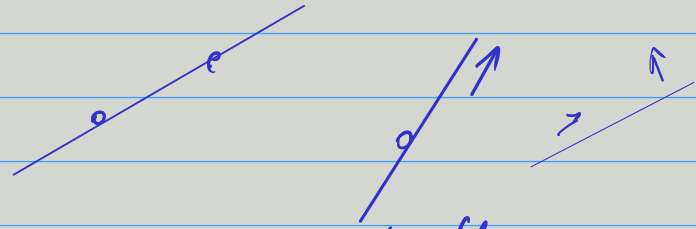
Ad ogni retta di $A_n(\mathbb{K})$ aggiungiamo come "punto improprio" suo la sua direzione.

In $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ → due rette sono parallele ⇔ hanno lo stesso punto improprio

⇒ due rette in $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ si intersecano sempre:
in un punto proprio se sono incidenti in $A_2(\mathbb{K})$

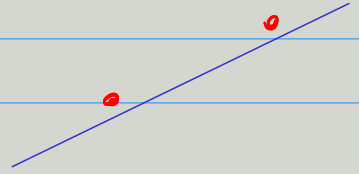
in un punto improprio se sono parallele in $A_2(\mathbb{K})$

b) per 2 punti in $A_n(\mathbb{K})$ passa una e una sola retta (a patto di chiamare l'insieme dei punti impropri A_∞ "retta impropria").



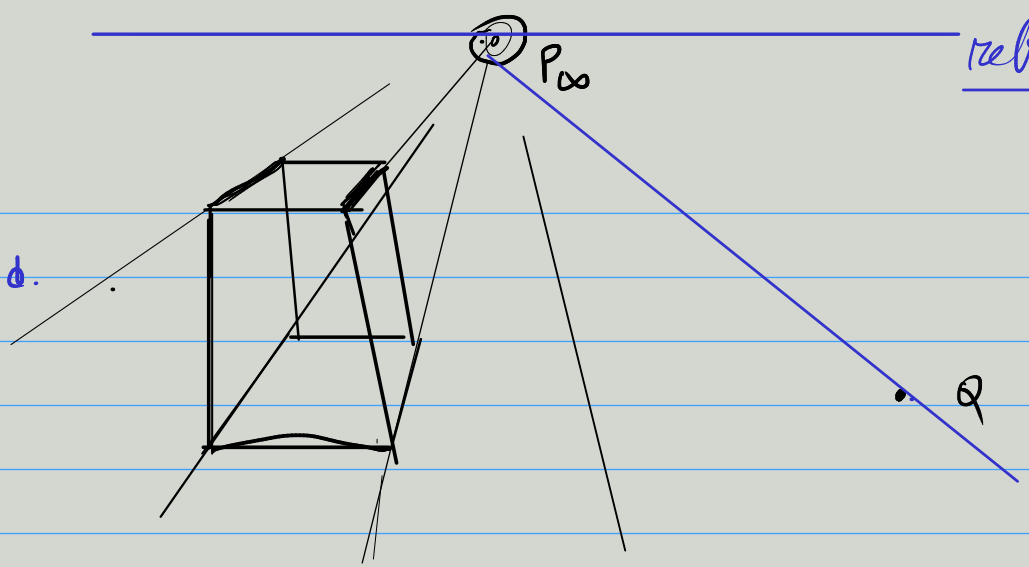
c) Un fascio di rette è proprio se tutte le rette hanno in comune un punto proprio, improprio se tutte le rette ~~sono parallele~~ hanno in comune un punto improprio

"Le direzioni si comportano molti tanti aspetti come dei punti:"



proiettiva

geometria proiettiva.



retta impropria

Sia $A_n(\mathbb{K})$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$

e supponiamo che in $A_n(\mathbb{K})$ sia dato un riferimento $\mathcal{T}=(O,\mathcal{B})$

↓

in particolare, a meno di fissare Π, $A_n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f:(x,y)=y-x)$

consideriamo $A = \mathbb{K}^n$ come l'insieme dei punti di $A_n(\mathbb{K})$

e $A_\infty = G_1(\mathbb{K}^n)$ = insieme di tutti i sottospazi vettoriali 1-dim.

di $\mathbb{K}^n$ = insieme di tutte le direzioni di $A_n(\mathbb{K})$.

OSSERVIAMO CHE A_∞ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme quoziente $\frac{\mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$ ove $(v_1 \dots v_n) \sim (w_1 \dots w_n)$

$\Leftrightarrow \mathcal{L}((v_1 \dots v_n)) = \mathcal{L}((w_1 \dots w_n)) \Leftrightarrow \operatorname{rk}\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0$ tale che $(v_1 \dots v_n) = \alpha (w_1 \dots w_n)$.

↗ le classi di eq. in $\frac{\mathbb{K}^n \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$ sono tutte le possibili basi (formate da un vettore) per un fissato spazio 1-dimensionale.

Sia ψ $\begin{cases} A \cup A_\infty \longrightarrow \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\sim} \\ P \in A \text{ con } P = (P_1 \dots P_n) \longrightarrow [(P_1 \dots P_n\ 1)]_\sim \\ \bar{v} \in A_\infty \text{ con } \bar{v} = (v_1 \dots v_n) \longmapsto [(v_1 \dots v_n\ 0)]_\sim \end{cases}$

Oss: 1) ψ è biiettiva

Infatti se $P \neq Q \Rightarrow (p_2 \dots p_n) \neq (q_2 \dots q_n)$

$P, Q \in A$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} p_2 & \dots & p_n & 1 \\ q_2 & \dots & q_n & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \psi(P) \neq \psi(Q)$

Se $P \in A$, $Q \in A_\infty \Rightarrow \psi(P) \neq \psi(Q)$

in quanto $rk\begin{pmatrix} p_2 & \dots & p_n & 1 \\ q_2 & \dots & q_n & 0 \end{pmatrix} = 2$

con $(q_2 \dots q_n) \neq \underline{0} \Rightarrow$

$[(p_2 \dots p_n\ 1)] \neq [(q_1 \dots q_n\ 0)]$

Supponiamo $\psi(Q) = \psi(R)$ con $Q, R \in A_\infty$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} q_2 & \dots & q_n & 0 \\ r_1 & \dots & r_n & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \exists\, \alpha \neq 0 \,.\, (q_2 \dots q_n) = \alpha(r_1 \dots r_n)$$

$\Rightarrow$ la dir. rappresentata da Q è quella rappresentata da R cioè $Q = R$

l'inversa di ψ si costruisce guardando

$\tilde{P} = [(x_2 \text{ —— } x_n\ x_{n+1})]$ e pensando

se $x_{n+1} = 0 \rightarrow \psi^{-1}(\tilde{P}) = [(x_2 \text{ —— } x_n)] \in A_\infty$

se $x_{n+1} \neq 0 \rightarrow \psi^{-1}(\tilde{P}) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\ \frac{x_2}{x_{n+1}} \text{ —— } \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \in A$

Chiamo spazio proiettivo di dimensione n su $\mathbb{K}$ l'insieme

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

e in questo ambiente i punti sono le classi di proporzionalità di vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$ a meno di coeff $\neq 0$.

Vediamo per $\underline{\underline{n=2}}$ che cosa succede alle rette

In $A_2(\mathbb{K})$: (*) $ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0\,0)$

L'applicazione ψ è detta rappr. in coordinate omogenee

$$(x,y) = \psi^{-1}([(x_1,x_2,x_3)])$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{x_1}{x_3}\,,\quad y=\frac{x_2}{x_3} \qquad x_3\neq 0$$

$$(*') \quad a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0 \qquad x_3\neq 0$$

moltiplicando per x_3

$$(*'') \quad ax_1+bx_2+cx_3=0 \qquad x_3\neq 0$$

punti propri della retta di partenza

cosa succede per $x_3 = 0$ → otteniamo un punto improprio.

otteniamo il punto improprio $[(-b, a, 0)]$, per cui stiamo risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

→ ma questo corrisponde proprio alla dir. della retta!! è il punto improprio della retta.

→ $\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0}$ è l'equazione omogenea della retta di partenza!

Le classi di autosoluzioni con $x_3 \neq 0$ corrispondono ai punti propri di r; la classe di autosoluzioni con $x_3 = 0$ corrisponde al punto

impropria = direzione della retta.

Viceversa: data $ax_1+bx_2+cx_3=0$ in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$.

se $(a,b)\neq(0,0)$ $\Rightarrow$ possiamo

considerare $x=\frac{x_1}{x_3}$ $y=\frac{x_2}{x_3}$ $x_3\neq 0$

e cercare i punti propri $\Rightarrow$

soluzioni di $ax+by+c=0$ $\rightarrow$ retta in $\mathbb{A}_c(\mathbb{K})$
(retta propria)

se $(a,b)=(0,0)$ $c\neq 0$ $\Rightarrow$

otteniamo l'equazione $x_3=0 \rightarrow \Lambda_\infty$

"retta impropria".

<u>OSS</u> importante: l'equazione $ax_1+bx_2+cx_3=0$ è una equazione lineare omogenea in 3 incognite

$\Rightarrow$ ha come soluzioni uno sp. vettoriale

$\tilde{V}_2$ di dimensione 2.

I punti della retta sono tutte e sole le classi di proporzionalità delle terne soluzioni contenute in questo sp. vettoriale

Viceversa: Se $\tilde{V}_2 \leq \mathbb{K}^3$ con $\dim \tilde{V}_2 = 2$

$\Rightarrow \tilde{V}_2$ è insieme di soluzioni di una equazione lineare omogenea $\dim(x_1, x_2, x_3)$

$\Rightarrow$ i suoi elementi rappresentano i punti di una retta (propria o impropria che sia).

$$A_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$$

$$r \longrightarrow \mathbb{P}(\tilde{V}_2)$$

Def: in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ si dice sottospazio proiettivo di dimensione t con $0 \leq t \leq n$ l'insieme di tutte le classi di vettori non nulli a meno di coeff. di proporzionalità contenuti in un sottospazio vettoriale $W \leq \mathbb{K}^{n+1}$ con $\dim W = t+1$

Spazi vettoriali $\longrightarrow$ Spazi affini $\longrightarrow$ Ampliamento proiettivo

Sott. vett. $\neq$ sottospazi affini

sottospazi affini $\rightarrow$ equazioni

Ampliamento proiettivo $\rightarrow$ coord. $\rightarrow$ equazioni omogenee $\rightarrow$ sottospazi vettoriali

sottospazi affini $\longleftrightarrow$ equazioni omogenee

I sottospazi proiettivi di

dim proiettiva	dim W	
0	1	punti
1	2	rette
2	3	piani
3	4	solidi
n-1	n	iperpiani

(n=2) siano $P=(x,y)$, $Q=(x'\ y')$ due punti distinti

costruire lo sp. vett. che descrive la retta per P e Q

↓

è uno s.vett. di dim = 2

contiene $\psi(P)$ e $\psi(Q)$ quindi contiene

i vettori $[(x\ y\ 1)]$ e $[(x'\ y'\ 1)]$

sono l. indip $(x\ y\ 1)$ e $(x'\ y'\ 1)$

$$W_1 = \mathcal{L}\left((x\ y\ 1)\ (x'\ y'\ 1)\right)$$

$$r := [(x,y)\ ;\ \mathcal{L}((x-x', y-y'))]$$

↗ 2 ingredienti distinti

il punto improprio della retta è $W_2 \cap [x_3 = 0] = \mathcal{L}((x-x'\ y-y'\ 0))$

Costruiamo la retta per $P = (x,y)$ e di direzione $\bar{v} = (\ell, m) \neq (0,0)$

$$W_2' = \mathcal{L}\left((x\ y\ 1)\ (\ell\ m\ 0)\right)$$

Fasci di rette

$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ eq. omogenea

$\rightarrow aX_1' + bX_2' + cX_3' = 0$

se $X_3' \neq 0$ corrisponde a $a\frac{X_1'}{X_3'} + b\frac{X_2'}{X_3'} + c = 0$

$\rightarrow$ fascio proprio

se $X_3' = 0 \rightarrow$ corrisponde a $aX_1' + bX_2' = 0$

$\rightarrow$ fascio improprio.

[Un fascio di rette in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3) = \widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ è l'insieme delle rette che passano per un punto fissato]

Condizione di allineamento fra 3 punti:

$[(x_1\ x_2\ x_3)] \in \mathcal{L}\left((x_1'\ x_2'\ x_3')\ (x_1''\ x_2''\ x_3'')\right)$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{pmatrix} = 2$$ se i punti sono tutti propri

$$\Rightarrow \operatorname{rk}\left(\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{array}\right) = 2$$

$n=3$ piani π $ax+by+cz+d=0$ $\quad x=\frac{x_1}{x_4}\ y=\frac{x_2}{x_4}\ z=\frac{x_3}{x_4}$

$\downarrow$

$\tilde{\pi}$ $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$ in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$

osserviamo che se $x_4 \neq 0 \rightarrow$ abbiamo i punti propri.

se $x_4=0$ otteniamo sfruttando

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$ e

quindi lo s.vettoriale delle soluzioni (che ha dim = 2) è esattamente corrispondente alla giacitura del piano

→ in part.colare lo chiameremo <u>retta</u> impropria del piano.

I punti di eq. $x_n = 0$ sono rapp. da uno s.vett. di dim = 3 che lungo chiameremo piano improprio

<u>N.B</u> Ogni volta che si pone l'ultima coordinata $(x_{n+1}) = 0$ si studia il sistema omogeneo ⇒ si ottiene lo spazio di traslazione.

Teorema: in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4) = \widetilde{A_3(\mathbb{K})}$ due piani si intersecano sempre in una retta (propria o impropria)

Dim. $\dim(\mathbb{K}^4) = 4$

due piani sono rappr. da sott. di dim 3.

siano U, W

$\Rightarrow \dim(U+W) \leq 4$

per Grassmann

$3 \geq \dim(U \cap W) \geq \dim U + \dim W - 4 =$

$= 6 - 4 = 2$

Quindi $U \cap W$ è almeno una retta

o un piano se $U = W$ □

Teorema: Un piano ed una retta in $\mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$ si intersecano sempre in un punto.

Dim: Sia $\dim(U)=3$ con U sopp. il piano
$\dim(W)=2$ con W la retta.

$2+3=5>4 \Rightarrow \dim(U\cap W)\geq 1$

e quindi $U\cap W$ è almeno un punto. □

N.B Il punto può essere proprio ($\Rightarrow$ retta e piano incidenti) o improprio ($\Rightarrow$ retta e piano paralleli).

(sotto) Spazio Affine → (sotto) spazio proiettivo → sotto spazio vettoriale

$\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ — $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \widetilde{\mathbb{A}_n(\mathbb{K})}$ — $\mathbb{K}^{n+1}$

sistemi lineari → classi di autosoluzioni di sistemi omogenei → sistemi omogenei che ammettono autosoluzioni

$(2,3) \hookrightarrow [(2\ 3\ 1)]_{\sim} \hookrightarrow \mathcal{L}((2\ 3\ 1))$

punto — classe di eq. — sottospazio vettoriale