

Posizione reciproca di 2 piani in $A_3(I/H)$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$d=0$
 $d'=0$ $\Rightarrow$ 2 piani
 coincidenti

$$\begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

A -B

$$rk(A) \geq 1$$

$$rk(A|B) \leq 2$$

	$rk(A)$	$rk(A B)$	m'	
$\emptyset \rightarrow$	1	1	∞^2	$\pi = \pi'$
	1	2	0	$\pi \not\parallel \pi'$, $\pi \cap \pi' = \emptyset$
	2	2	∞^2	$\pi = \pi \cap \pi'$

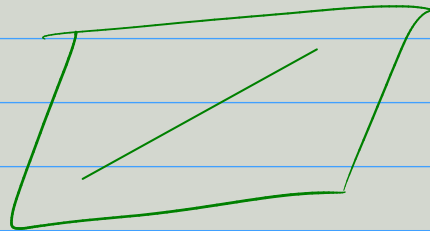
$\pi \parallel \pi'$

Se il sistema è incompatibile $\Rightarrow rk(A) = 1 \Rightarrow$ l'eq. omogenea di π

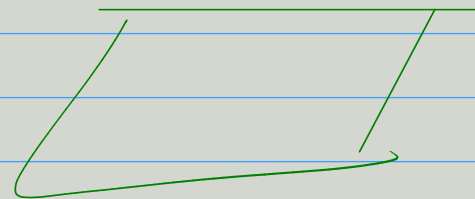
e quello di π' hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow$ la giacitura di π coincide con la giacitura di $\pi' \Rightarrow \pi // \pi'$

viceversa: se $\pi \cap \pi' = \emptyset \Rightarrow rk(A) = 1 \Rightarrow \pi // \pi'$

Posizione reciproca di un piano e una retta in $A_3(K)$



$$\pi_0 \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$



$$rk \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$\pi_1: a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

$$rk(a'', b'', c'') = 1$$

$$AX=B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right)$$

$A \qquad -B$

$$2 \leq \text{rk}(A) \leq 3$$

$$\text{rk}(A) \leq \text{rk}(A|B) \leq 3$$

$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$		
2	2	∞^1	$\pi \cap \pi \neq \emptyset \text{ cioè } \pi \subseteq \pi$
2	3	0	$\pi \cap \pi = \emptyset, \pi // \pi$
3	3	<u>1</u>	$\pi \cap \pi = \{P\}$

$$\text{Se } \text{rk}(A) = 2 \Rightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (a'' \ b'' \ c'') \text{ è c. lica di } (a \ b \ c)$$

$(a' \ b' \ c')$ $\Rightarrow$ l'equazione $a''x + b''y + c''z = 0$

che dà la giacitura del piano

dipendente dalle 2 eq. che danno la dir. della

retta $\Rightarrow$ in particolare ogni soluzione di

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \text{ è soluzione di}$$

$$a''x + b''y + c''z = 0$$

quindi la direzione della retta è
contenuta nella giacitura del piano e

$\alpha // \pi$

□

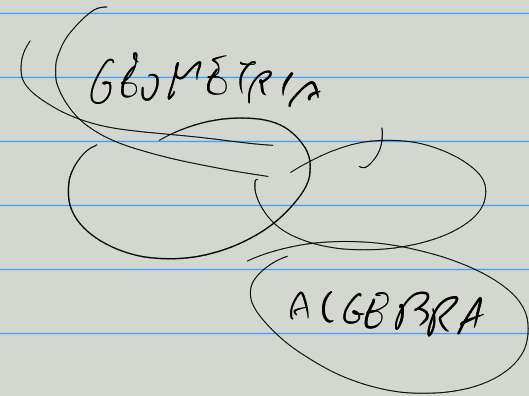
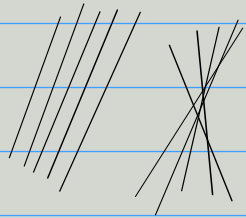
Prozioni reciproche di 2 piani in $A_n(\mathbb{K})$

• come si rappresenta un piano?

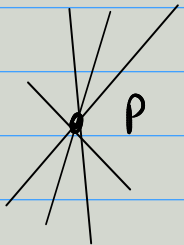
• cosa accade quando li mettiamo a sistema?

Affine

Fasce e stelle

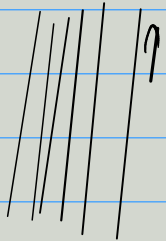


$n=2$



In $A_2(K)$ si dice fascio proprio di rette l'insieme di tutte le rette che passano per un punto $P = (x_0, y_0)$

assegnato; si dice fascio improprio di



rette l'insieme di tutte le rette che hanno direzione parallela ad una retta data.

Il punto P è detto centro del fascio proprio.

Una generica retta del piano ha equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 = 1$

e equazioni proporzionali descrivono rette coincidenti.

$$x + y + 1 = 0 \quad \equiv \quad 3x + 3y + 6 = 0$$

Vogliamo trovare le rette per il punto $(x_0, y_0) = P$

risolviamo il sistema omogeneo

$$\rightarrow \begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \text{nelle incognite } (a, b, c). \end{cases} \quad \begin{matrix} a^2 + b^2 = 1 \\ (a, b) \neq (0, 0) \end{matrix}$$

avrà ∞^2 soluzioni $\rightarrow$ ci restano però ∞^1
soluzioni a meno di
coeff. di proporzionalità

in particolare $c = -ax_0 - by_0$

$\Rightarrow$ l'equazione è $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

al variare di a e b in tutti i

modi possibili.

- Fascio improprio di rette

$$r_0: a_0x + b_0y + c_0 = 0$$

$\triangleright // r_0$ con equazione

$$ax + by + c = 0$$

$$r \text{ e } r_0 \text{ se } \text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a & b \end{pmatrix} = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a & b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(*)' \quad a_0 b - b_0 a = 0$$

cioè $\Leftrightarrow$ i coeff. $(a \ b \ c)$ dell'eq. di
 $\cap$ soddisfano l'equazione $(*)'$

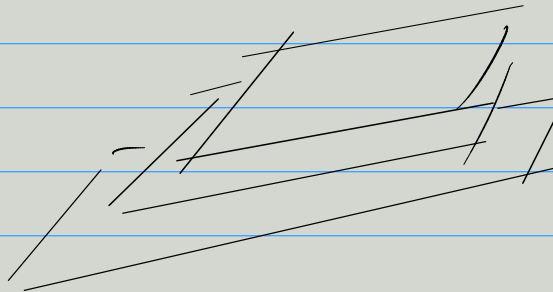
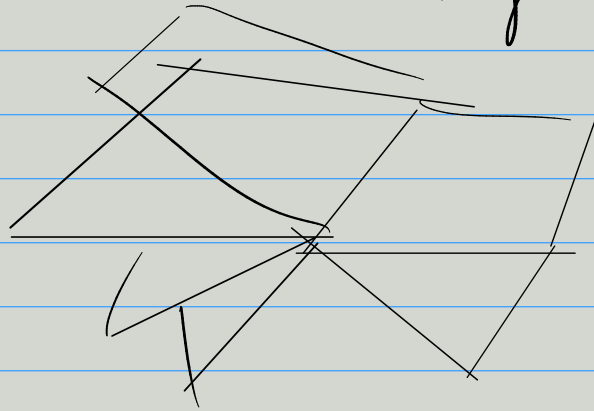
che è una eq. lineare omogenea in 3
 incognite con ∞^2 soluzioni che
 corrispondono ad ∞^2 oggetti a meno di prop.

In particolare l'equazione sarà del tipo

$$\omega(a_0 x + b_0 y) + c = 0$$

Fasce di piani in $A_3(\mathbb{K})$.

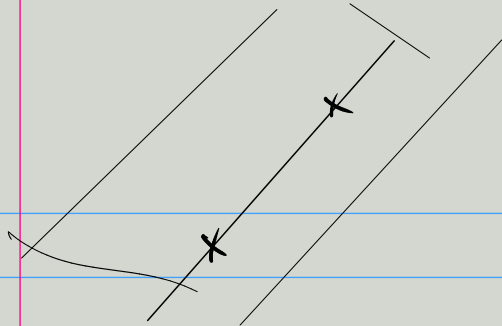
Si dice fascio proprio di piani in $A_3(\mathbb{K})$ l'insieme di tutti i piani che passano per una retta r assegnata. Si dice fascio improprio l'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano assegnato (i.e. tutti i piani che hanno giacitura assegnata).



Fascio proprio

sia r_0 una retta fissata dello spazio e

$$P = (x_0 \ y_0 \ z_0) \quad Q = (x_1 \ y_1 \ z_1)$$



due punti distinti di π

Se $P, Q \in \pi$ piano $\Leftrightarrow \pi \subseteq \pi$

ha $ax + by + cz + d = 0$ la generica eq.
di π

$\Rightarrow (a, b, c, d)$ devono soddisfare
il sistema lineare omogeneo in 4 incognite

$$(*) \begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

In particolare la matrice incompleta è

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{pmatrix}$$

ma $\text{rk}(A) = ?$ perché se fosse $\text{rk}(A) = 1 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$

$$\Rightarrow P = Q \quad \text{by}$$

quindi il sistema (*) ha sempre ∞^2 soluzioni
e a meno di coeff. di proporzionalità 6
ne abbiamo descritte ∞^2 piani $\square$

Fascio improprio

$$\pi_0: a_0x + b_0y + c_0z + d = 0$$

Vogliamo poi con la stessa giacitura

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1$$

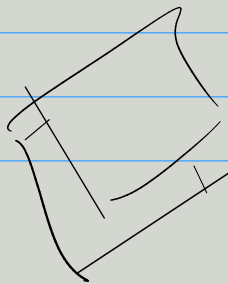
questo corrisponde al sistema lineare

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a & c \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b & c \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

risultato essere un sistema lineare omogeneo
in $(a \ b \ c \ d)$ di 2 eq. indipendenti
 $\Rightarrow \infty^2$ soluzioni di cui le sott. a meno
di proporzionalità discrete ∞^2 piani.

$$\alpha(a_0x + b_0y + c_0z) + d = 0$$

$$\alpha \neq 0 \quad d \in K$$

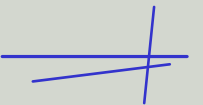


Def. Si dice fascio di iperpiani in $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$
 una collezione di ∞^1 iperpiani i coeff delle cui eq.
 soddisfano un sistema lineare omogeneo
 in $(n+1)$ incognite / ^{e n -equazioni.} In particolare tali
 iperpiani corrispondono alle soluzioni di tale
 sistema a meno di coeff. di proporzionalità.

$n=2 \rightarrow$ iperpiani = rette. sistemi di 1 eq.
 lineari

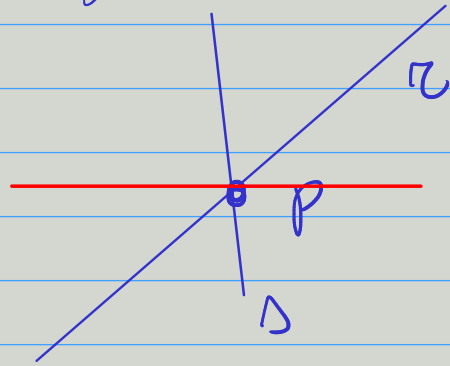
$n=3 \rightarrow$ " = piani sistemi di 2 eq.
 lineari indip.

$n=4 \rightarrow$ " = solidi sistemi di 3 eq. lineari
 indip.



Come si scrive l'eq. di un fascio proprio di rette
per un punto o l'eq. di un fascio proprio
di piani per una retta?

$n=2$



sia $P = (x_0, y_0)$

r, s rette con P e $n=2$
 $r \neq s$ di equazioni

$$r: ax + by + c = 0$$

$$s: a'x + b'y + c' = 0$$

$$\alpha k \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$$

La generica retta per P avrà equazione

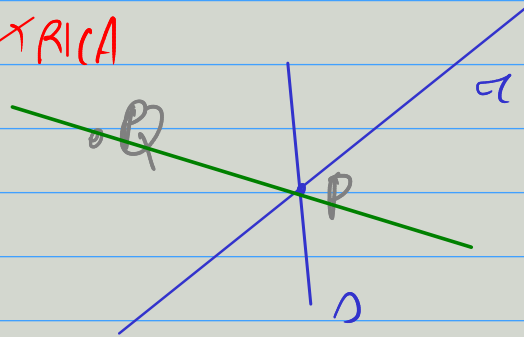
$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

DIM ALGEBRICA: l'insieme delle soluzioni del sistema dato da le eq.

è un sott. vettoriale di $\mathbb{A}^3$ con $\dim = 2$.

Le rette assegnate sono soluzioni indipendenti $\Rightarrow$
sono una base $\Rightarrow$ ogni retta è com.
lineare di esse in questo s. v. $\mathbb{A}^3 \Rightarrow$
ogni equazione di rette del fascio è c. lineare
non banale di esse $\square$

DIM. GEOMETRICA



Sia t una retta per $P \Rightarrow$

$\exists Q \in t$ con $Q \neq P$

e in particolare t è l'unica
retta per P e Q .

Siano $P = (x_0, y_0)$ $Q = (x_1, y_1)$

mostriamo che t ha come eq. una c. lineare delle
eq. di r e s .

CONSIDERIAMO IL SISTEMA

$$\lambda(ax_1 + by_1 + c) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c') = 0$$

in λ e $\mu \rightarrow$ il sistema ha

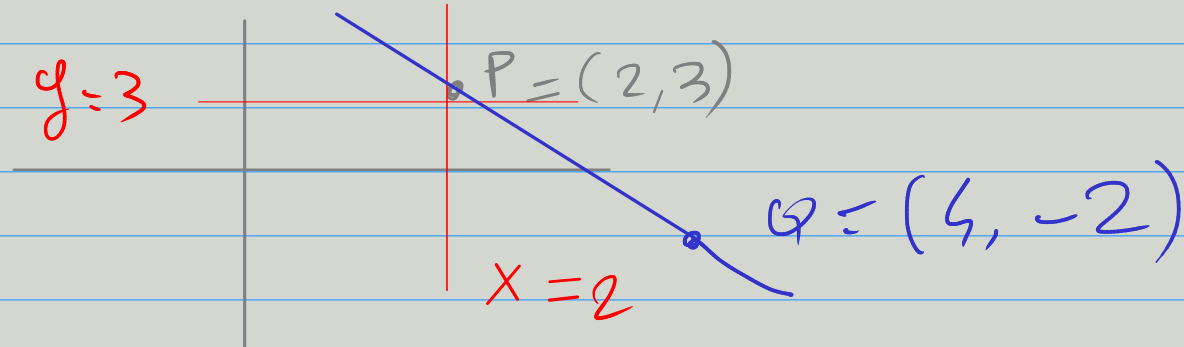
∞^1 soluzioni e ogni una soluzione

è proporzionale alle altre. Prendiamo una

arbitr. $(\alpha, \beta) \Rightarrow$ descrive una retta e tale retta

è necessariamente passa per P e per Q

$\Rightarrow$ è la retta t



$$\lambda(y-3) + \mu(x-2) = 0$$

$$\lambda(-1-3) + \mu(4-2) = 0$$

$$-5\lambda + 2\mu = 0$$

$(2, 5)$ è la soluzione.

$$\text{e: } 2(y-3) + 5(x-2) = 0$$

$$2y + 5x - 16 = 0$$

$$-4 + 20 - 16 = 0 \quad (4, -2) \quad \boxed{\text{OK}}$$

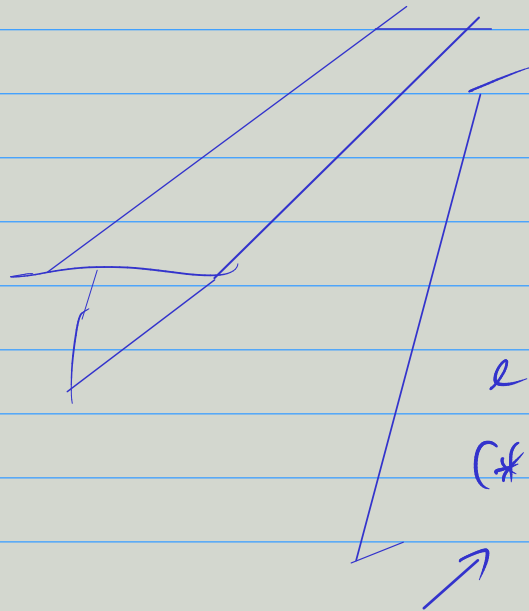
Faccio propri i punti per se $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Notiamo che abbiamo già 2 piani indipendenti per $\ell_0 \Rightarrow$ i loro coeff. ricorrono come una base per lo sp. vett. delle eq. dei piani del piano

$\Rightarrow$ il piano generico si scrive come

$$(*) \quad \alpha(a x + b y + c z + d) + \beta(a' x + b' y + c' z + d') = 0$$



Altrimenti geometricamente
si considera $P \notin \ell_0$
e il piano della forma
(*) per P

Oss: In $A_2(k)$ sia $\mathcal{F}$ un fascio di centro P o un fascio improprio. Allora $\forall Q \neq P$

$$\exists! \tau \in \mathcal{F} \text{ con } Q \in \tau.$$

In $A_3(k)$ sia $\mathcal{F}$ un fascio di centro una retta π o un fascio improprio di piani

$$\Rightarrow \forall Q \notin \pi \exists! \pi \in \mathcal{F} \text{ con } Q \in \pi$$

□

Pb: come fare ad evitare di preoccuparsi della distinzione fra fasci propri e impropri?