

Coordinatizzazione

$$\Phi_r: A \rightarrow K^n$$

$$P = (O, O).$$

$$\Phi_r(P + \bar{v}) = \Phi_r(P) + \tilde{v} \quad \text{ove } \tilde{v} = \text{vettore d. componenti di } \bar{v} \text{ rispetto a } O$$

[Dalla coordinatizzazione segue che "essenzialmente" $\forall$ campo K e per ogni dimensione n esiste un unico spazio affine $A_n(K)$.]

$$A_n = (A, V_n(K), f)$$

$$\begin{array}{ccc} A_n(K) & \xrightarrow{\Phi} & K^n \\ A'_n(K) & \xrightarrow{\Phi} & K^n \end{array}$$

Rappresentazione dei sottospazi lineari.

$$S_n = [P; W_n]$$

$$X_o = \Phi(P)$$

$\forall$ vettore $\bar{w} \in W_n$ sia

$\tilde{w}$ il vettore delle componenti

di $\bar{w}$ rispetto a B .

$$\Phi(S_n) = \{ \Phi(Q) \mid Q \in S_n \} =$$

$$Q \in S_n \Leftrightarrow \exists \bar{w} \in W_n$$

$$\text{con } Q = P + \bar{w}$$

$$= \{ \Phi(P + \bar{w}) \mid \bar{w} \in W \} =$$

$$= \{ \Phi(P) + \tilde{w} \mid \tilde{w} \in \tilde{W} \} =$$

$$\text{con } \tilde{W} \leq \mathbb{K}^n$$

$$= \{ X_0 + \tilde{w} \mid \tilde{w} \in \tilde{W} \} =$$

$$\text{e } \tilde{W} = \{ (w_2 - w_n) \mid$$

il vettore $w_2 \bar{e}_2 + \dots + w_n \bar{e}_n \in W \}$

$$= X_0 + \tilde{W}$$

$\uparrow$ vettore fissato $\nwarrow$ elemento generico di un sottospazio di $\mathbb{K}^n$

$\rightarrow$ l'insieme ha la stessa struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX = B$ ($X_0 + Z$) con X_0 sol. part. $Z \in \text{Ker}(A)$

Sia $A_n = (A, V_n(K), f)$ uno spazio affine e $\Gamma = (O, B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n))$ un riferimento affine.

- 1) $\forall$ sistema lineare compatibile $AX=B$, ^(in n incognite) l'insieme delle soluzioni di tale sistema rappresenta le coordinate dei punti di un sottospazio lineare S_n di $A_n(K)$.
- 2) Viceversa per ogni sottospazio lineare S_n di $A_n(K)$ esiste un sistema lineare $AX=B$ in n incognite tale che $\Phi(S_n) =$ insieme delle coordinate rispetto Γ dei punti di S_n e l'insieme delle soluzioni di $AX=B$.

DIM: Sia $AX=B$ un sistema compatibile in n incognite

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni di $AX=B$ è del tipo

$X = X_0 + z$ con z soluzione di $Az = \underline{0}$.

$$S = \{X_0 + z \mid z \in \tilde{W}\} \quad \text{ove } \tilde{W} \subseteq K^n \text{ con eq. } Az = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ dato P e posto $P = \Phi_n^{-1}(X_0)$ e

$$W = \{ \bar{w} \in V_n(K) \mid \bar{w} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n \text{ con } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \tilde{W} \}$$

$$\text{abbiamo che } \Phi^{-1}(S) = \{P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\} = [P; W]$$

• Viceversa se $S_n = [P; W_n]$ un sottospazio lineare

$$\Phi(S_n) = \{ \Phi(P) + z \mid z \in \tilde{W}_n \}$$

In particolare

$$Q \in S_n \Leftrightarrow \Phi(Q) \in \Phi(S_n)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(Q) = \Phi(P) + z \quad \text{per } z \in \tilde{W}_n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Phi(Q) - \Phi(P) \in \tilde{W}_n} \quad (*)$$

Sia adoro $(\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n)$ una base di $\tilde{W}_n$

$(x_1 \text{ --- } x_n)$ le coordinate di Q

$(p_1 \text{ --- } p_n)$ le coordinate di P

Vogliamo $(x_1 \text{ --- } x_n) - (p_1 \text{ --- } p_n) \in \mathcal{L}(\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n)$

$\downarrow$
vero $\Leftrightarrow$

$$\exists k \left(\begin{array}{c|c} \bar{v}_1 & \bar{v}_n \\ \hline x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{array} \right) = h$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
colonne
indipendenti

questa condizione corrisponde ad imporre che
tutti i minori di ordine $(h+1)$ hanno $\det = 0$
e questo dà luogo ad un sistema lineare

$AX=B$ in n incognite e n equazioni
(non indipendenti)

□

OSS

Sia $S_n = [P; W_n]$ un sottospazio lineare
↓ $A_n(\mathbb{K})$ descritto da $AX=B$.

Allora come punto P possiamo prendere
quello che ha come coordinate quelle della
soluzione particolare X_0 di $AX=B$.

I vettori del sottospazio di traslazione W_n
corrispondono alle soluzioni del sistema
omogeneo associato $AZ=\underline{0}$

ESEMPIO: In $A_2(\mathbb{K})$

consideriamo S_π descritto rispetto $\mathcal{P}$
dall'equazione $3x + 2y - 7 = 0$

una soluzione particolare è $(1, 2)$

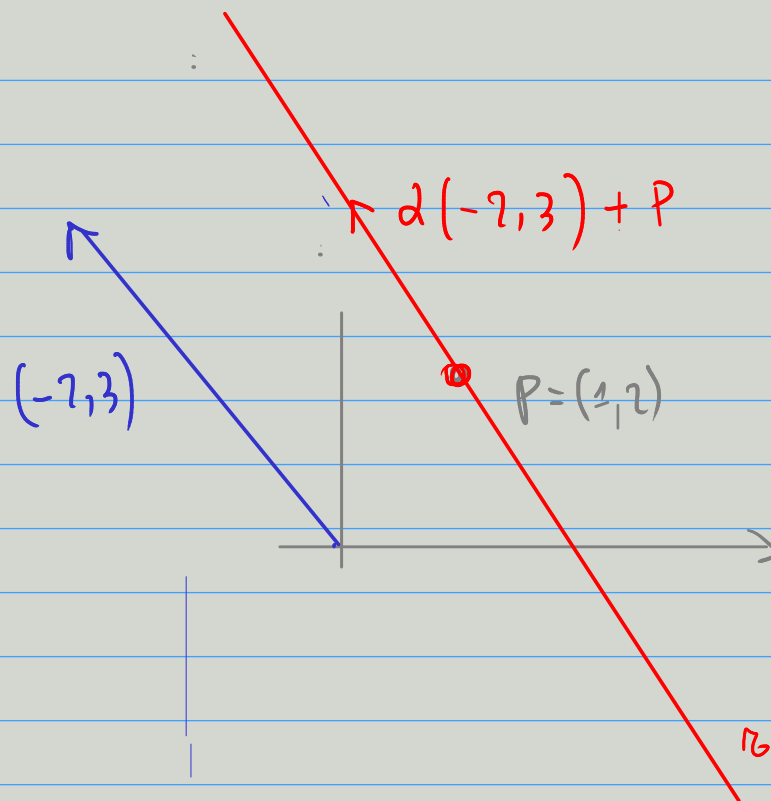
il sottospazio di traslazione corrisponde alle
soluzioni di $3x + 2y = 0 \Rightarrow$

tutti i vettori della forma

$$\alpha(-2, 3)$$

$$\Rightarrow S_\pi = [(1, 2) ; \mathcal{L}(-2, 3)]$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(rappresentazione} \\ \text{parametrica di} \\ \text{una retta).} \end{array}$$



Def: lo spazio di traslazione di $\dim = 1$ di una retta è detto direzione
di $\dim = 2$ di un piano giacitura

Si dice che 2 sottospazi lineari $S_n = [P, W_n]$

$$S'_k = [P', W'_k]$$

sono paralleli se $W_h \subseteq W'_k$ oppure $W'_k \subseteq W_h$

(in altre parole $\dim(W_h + W'_k) = \max(h, k)$).

Chiaramente se $h=k \Rightarrow$ due sottospazi sono paralleli

$\Leftrightarrow$ hanno lo stesso sott. di traslazione

più ancora in dettaglio: "2 rette sono parallele

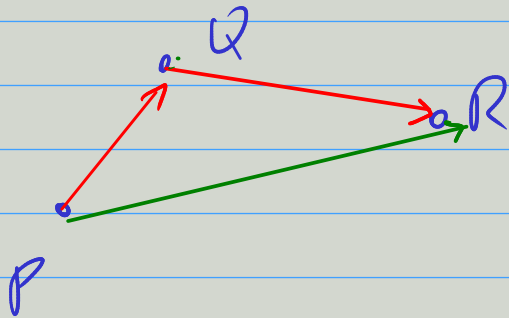
$\Leftrightarrow$ hanno la stessa direzione".

Proposizione: Sia $S_h = [P, W_h]$ un sottospazio lineare
e $Q \in S_h \Rightarrow S_h = [Q, W_h]$.

"come origine di S_h possiamo prendere un qualsiasi suo punto"

$X_0 + \mathbb{Z}$

DIM: Sia $Q \in [P; W_n]$ e consideriamo $R \in [Q; W_n]$



$$\Rightarrow \vec{QR} \in W_n \text{ ma anche } \vec{PQ} \in W_n$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \in W_n \Rightarrow R \in [P; W_n]$$

$$\Rightarrow [Q; W_n] \subseteq [P; W_n]$$

$$\text{viceversa sia } R \in [P; W_n] \Rightarrow \vec{PR} \in W_n \text{ e } \vec{PQ} \in W_n$$

$$\Rightarrow \vec{QP} = -\vec{PQ} \in W_n \text{ e quindi}$$

$$\vec{QP} + \vec{PR} = \vec{QR} \in W_n \Rightarrow R \in [Q; W_n]$$

$$\text{e dunque } [P; W_n] \subseteq [Q; W_n]$$

□

Concludere che intersezione 2 sottospazi lineari

→ IN COORDINATE METTIAMO A SISTEMA LE RISPETTIVE
EQUAZIONI — il sistema risulta incompatibile $\Rightarrow$ sono disgiunti

il sistema è compatibile e otteniamo quindi un nuovo sottospazio lineare e in particolare il sottospazio di traslazione corrisponderà alle soluzioni del sistema nuovo omogeneo associato (e quindi è l'intersezione dei precedenti spazi di traslazione) mentre l'origine sarà un punto in comune ai 2 sottospazi.

Esempio In $A_3(\mathbb{K})$

$$S_2 = \{ (x, y, z) \mid \underline{x + y - z = 3} \}$$

$$S'_2 = \{ (x, y, z) \mid \underline{x + 7y = 4} \}$$

$$S_2 \cap S'_2 = \{ (x, y, z) \mid \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 7y = 4 \end{cases} \}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$S_1 \cap S_1'$ consta di ∞^1 punti $\Rightarrow$ è una retta
e la sua direzione è data dai

vettori che soddisfano $x+y-z=0 \rightarrow$ giacitura di S_1
e
 $x+2y=0 \rightarrow$ giacitura di S_1'

$\Rightarrow$ è proprio l'intersezione delle 2 giaciture.

Oss: In $A_3(K)$ quando due piani π, π' di equazioni

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

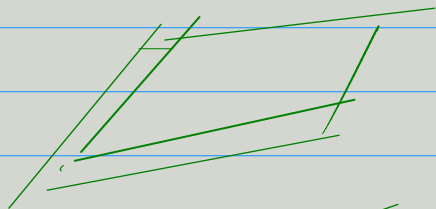
sono paralleli? Quando $ax+by+cz=0$ è
equiv. ad $a'x+b'y+c'z=0$

cioè quando $\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$

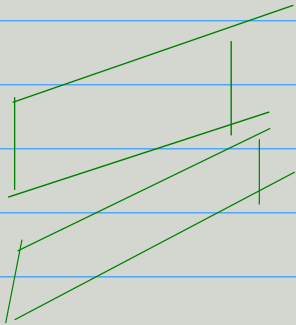
MA ADESSO OSSERVIAMO CHE SE

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

allora per $\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ ci sono 2 possibilità



1) $\text{rk} = 1 \Rightarrow$ il sistema ha ∞^2 soluzioni
 $\Rightarrow \pi = \pi'$



2) $\text{rk} = 2 \Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni
 $\Rightarrow \pi \cap \pi' = \emptyset$

| DUE PIANI PARALLELI O COINCIDENTI IN $A_3(K)$ O

| SONO DISGIUNTI!

Viceversa: se due piani π e π' non disgiunti:

$\Rightarrow$ il sistema $AX=B$ che descrive
la loro intersezione deve essere incompatibile

$$\Rightarrow \text{rk}(A) \neq \text{rk}(A|B)$$

$$\text{ora } \text{rk}(A) \in \{1, 2\} \quad \text{rk}(A|B) \in \{1, 2\}$$

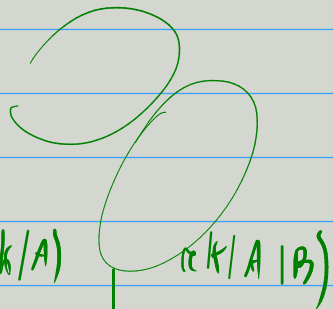
se devono essere diversi $\text{rk}(A)=1, \text{rk}(A|B)=2$

ma $\text{rk}(A)=1 \Rightarrow$ che i piani hanno la
stessa giacitura $\Rightarrow$ sono paralleli.

□

Proposizione:

Siano $S_n = [P, W_n]$, $S'_n = [Q, W'_n]$ due
sottospazi lineari $\Rightarrow$



$\text{rk}(A)$

$\text{rk}(A|B)$

1

1

1

2

2

2

α^2

0

α^1

piani
disgiunti

vul dire piani
paralleli.

$$1) S_h \subseteq S_k \Leftrightarrow S_h \cap S_k \neq \emptyset \text{ e } W_h \subseteq W'_k$$

$$2) \text{ Se } S_h \cap S_k \neq \emptyset \Rightarrow S_h \cap S_k = [P', W_h \cap W'_k]$$

con P' punto generico d. intersezione.

DIM: Se $S_h \subseteq S_k \Rightarrow \exists P' \in S_h \cap S_k \Rightarrow S_h = [P', W_h]$
e $S'_k = [P', W'_k]$

$$\forall \bar{v} \in W_h, P + \bar{v} = Q \in S_h \Rightarrow P + \bar{v} \in S'_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{v} \in W'_k \Rightarrow W_h \subseteq W'_k.$$

viceversa se $S_h \cap S'_k \neq \emptyset$ e $W_h \subseteq W'_k$

allora $S_h = [P'; W_h]$ $S'_k = [P'; W'_k]$

e osserviamo $\forall Q \in S_h: \vec{P'Q} \in W_h \subseteq W'_k \Rightarrow$
 $\Rightarrow Q \in S'_k$ #

2) Supponiamo $P' \in S_h \cap S'_k \Rightarrow [P', W_h \cap W'_k] \subseteq S_h \cap S'_k$
 ma se $Q \in S_h \cap S'_k \Rightarrow \vec{P'Q} \in W_h \cap W'_k$
 $\Rightarrow Q \in [P'; W_h \cap W'_k]$ $\square$

OSS: In generale 2 sottospazi lineari paralleli sono o l'uno contenuto nell'altro o disgiunti.

DIM Sia $S_h = [P, W_h]$ $S_k = [Q, W'_k]$ e supponiamo
 $W_h \subseteq W'_k$

$\Rightarrow$ Se $\exists R \in S_h \cap S_k$ abbiamo $S_h = [R, W_h]$

$S_k = [R, W'_k]$

con $W_h \subseteq W'_k \Rightarrow$

$\Rightarrow S_h \subseteq S_k$ $\square$

Abbiamo visto che alcune proprietà valgono. Verifichiamo che non è un caso.

$A_n(K)$

- [Proposizione 9.2.1] In $A_n(K)$, con $n \geq 2$,
1. per due punti distinti passa una e una sola retta (Postulato della Geometria Elementare);
 2. per due rette distinte, parallele o incidenti, passa uno e un solo piano;
 3. due rette complanari, aventi intersezione vuota, sono parallele;
 4. per un punto passa una e una sola retta, parallela a una retta data (noto come V Postulato di Euclide);
- CAPITOLO 9. SPAZI AFFINI
5. per un punto passa uno e un solo piano, parallelo a un piano dato;
 6. per tre punti, non allineati, passa uno e un solo piano (Postulato della Geometria Elementare);
 7. una retta, avente due punti distinti in un piano, giace nel piano (Postulato della Geometria Elementare);
 8. per un punto passano, almeno, due rette distinte.

DIM

1) Siano $P, Q \in A$ $P \neq Q$ e $\pi = [P, L(\vec{v})]$, $Q \in \pi$

è una retta per P e $Q \Rightarrow \vec{PQ} \neq \vec{0}$ e $\vec{PQ} \in L(\vec{v}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow L(\vec{v}) = L(\vec{PQ})$ perché $\dim L(\vec{v}) = 1$

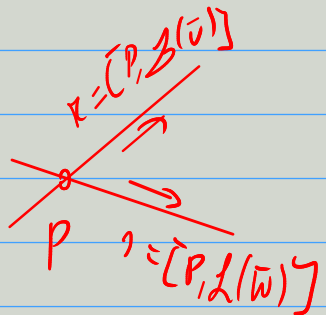
2)

$l = [P, L(\vec{v})]$
 $m = [Q, L(\vec{v})]$

osserviamo che un piano che contiene π ed $\Rightarrow$
 deve aver giacitura che contiene $\vec{v}$ e $\vec{PQ}$

ma $\pi \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow \vec{PQ} \notin L(\vec{v})$.

quindi il nostro piano deve essere $[P; L(\vec{v}, \vec{PQ})] = \pi$



la giacitura di π deve coinvolgere

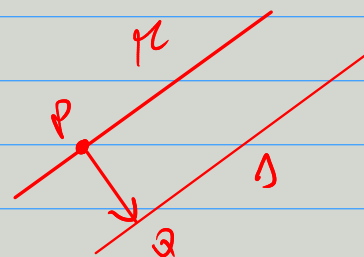
$\vec{v}, \vec{w}$ con $\vec{v}, \vec{w}$ indep.

$$\Rightarrow \pi = [P; L(\vec{v}, \vec{w})]$$

3) Modo sintetico

$$\text{Siano } \pi = [P, L(\vec{v})]$$

$$\gamma = [Q, L(\vec{w})]$$

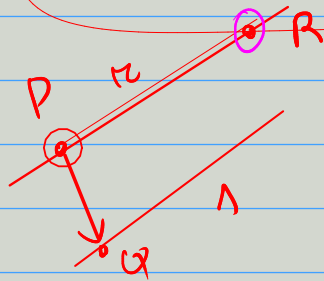


due rette complanari ^{distinte} in particolare

$$\pi, \gamma \subseteq [P, L(\vec{v}, \vec{w}, \vec{PQ})] \quad \text{con } \dim L(\vec{v}, \vec{w}, \vec{PQ}) = 2$$

supponiamo $\bar{v}, \bar{w}$ siano indipendenti cioè $\bar{v} \notin \bar{w}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = \alpha \bar{v} + \beta \bar{w}$ per qualche α, β .



$\Rightarrow$ rid $R = \underline{P + \alpha \bar{v}} \Rightarrow \vec{PR} = \alpha \bar{v}$

$\Rightarrow R \in L$

ma $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR}$ e

$\vec{QP} = -(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w})$

$\Rightarrow \vec{QR} = -(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) + \vec{PR} =$

$= -\beta \bar{w} \Rightarrow R \in [Q, L | \bar{w}]$

$\Rightarrow R \in L \cap \bar{L} \neq \emptyset \quad \text{g}$

Metodo ANALITICO (in $A_2(K)$)

In $A_2(K)$

$L: ax + by + c = 0$

$\cap: a'x + b'y + c' = 0$

per ipotesi $r \cap s = \emptyset \Rightarrow$ il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

deve essere incompatibile

$$\Rightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq \text{rk} \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$	
1	1	
1	2	0 soluzioni
2	2	

$$\Rightarrow 0 \text{ soluzioni} \Rightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ le direzioni di r e s coincidono

$$\Rightarrow r // s.$$

Q

In generale possono $\exists$ rette che sono disgiunte ma non parallele?

Nel piano no!

Def: In $A_n(k)$ con $n \geq 3$ due rette che non sono complanari sono dette sgheembe

N.B: Due rette con un punto in comune sono sempre complanari $\Rightarrow$ due rette sgheembe (se esistono) non sono sempre disgiunte.

Teorema: In $A_n(k)$ con $n \geq 3$ esistono almeno una coppia di rette sgheembe.

DIM Sia $P \in A_n(k)$ un punto e $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ tre vettori indipendenti dello spazio di traslazione.

$$\tau_0 = [P, L(\bar{e}_1)] \quad \sigma = [\overbrace{P + \bar{e}_3}^Q, L(\bar{e}_2)]$$

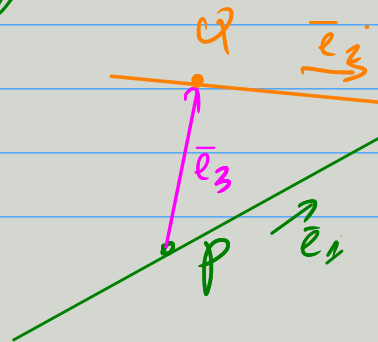
se Π è un sottospazio che contiene

$$\tau_0 \text{ ed } \sigma \Rightarrow \Pi = [P, W]$$

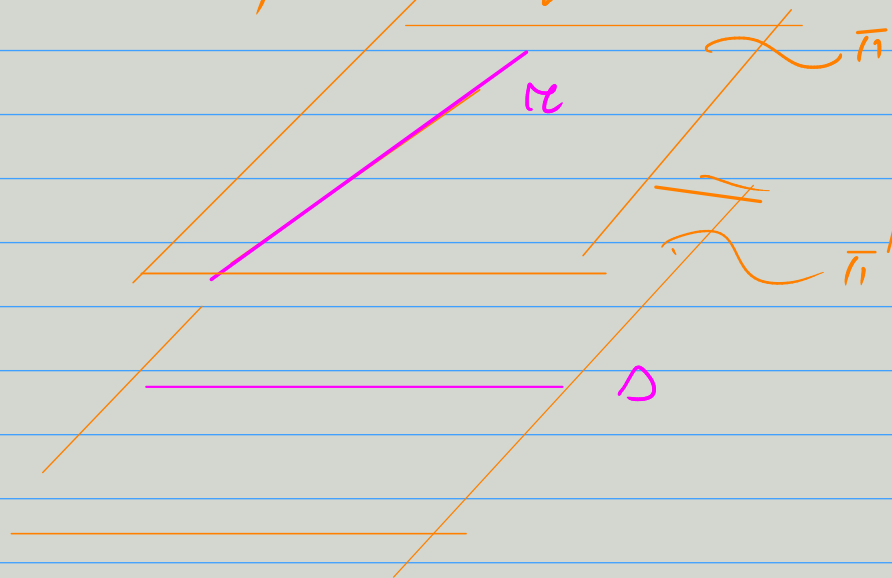
$$\text{con } \overrightarrow{P(P + \bar{e}_3)}, \bar{e}_1, \bar{e}_2 \in W \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \in W$$

$$\dim W \geq 3$$

Ne segue che τ_0 ed σ sono sghembi $\square$



Teorema: Siano r ed s due rette sghembe. Allora
 esistono esattamente 2 piani π e π' con
 $\pi // \pi'$ ed $r \subseteq \pi$, $s \subseteq \pi'$.



DIM:

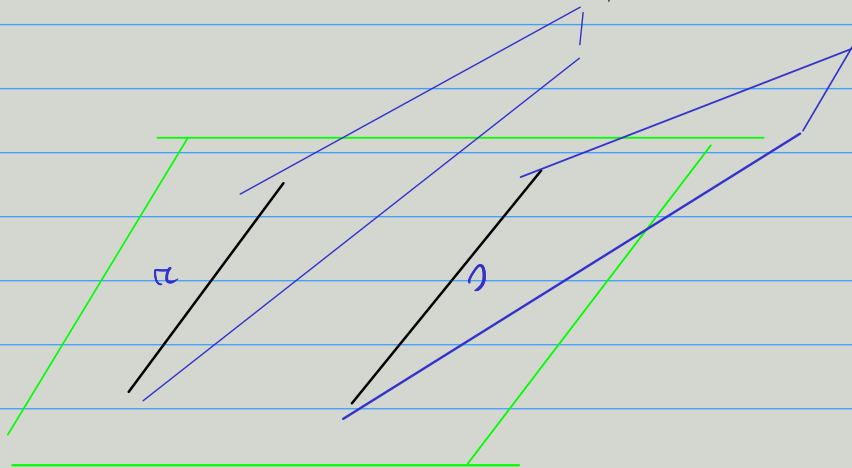
$$\text{Sia } r = [P, L(\bar{v}_1)] \quad s = [Q, L(\bar{v}_2)]$$

$$\text{prova che } \pi = [P, L(\bar{v}_1, \bar{v}_2)] \quad \pi' = [Q, L(\bar{v}_1, \bar{v}_2)]$$

$$\Rightarrow \pi // \pi', \quad r \subseteq \pi, \quad s \subseteq \pi'.$$

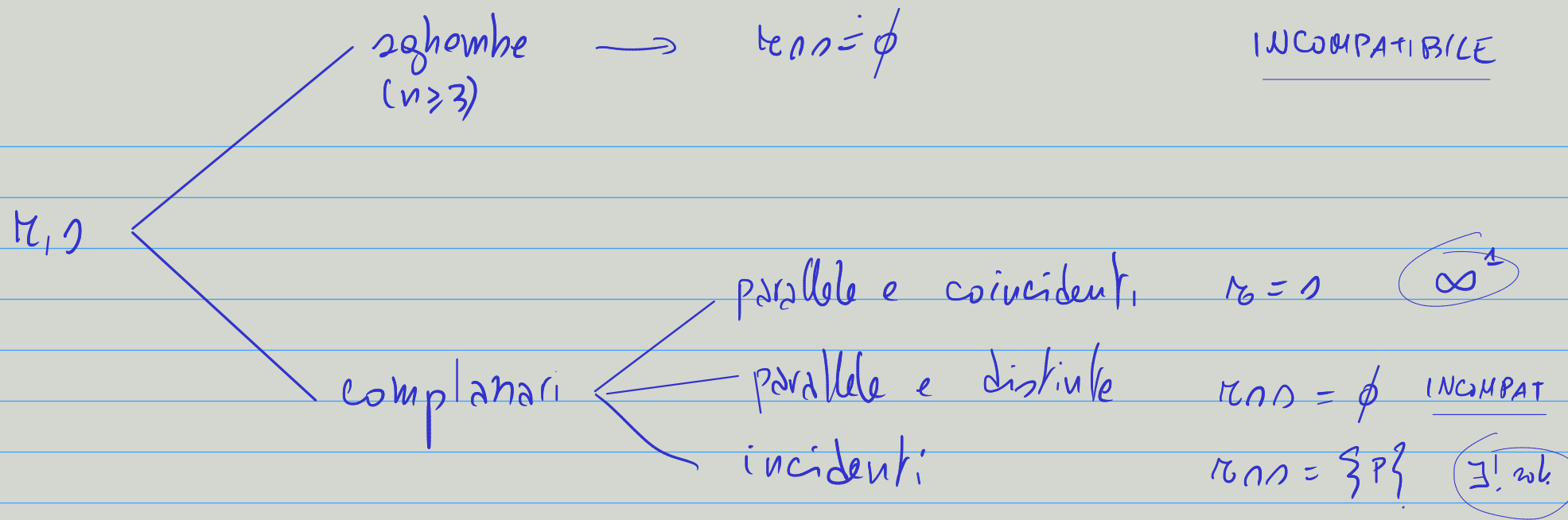
Inoltre ogni piano π'', π''' tale che $\pi'' \supseteq \pi$ e $\pi''' \supseteq \pi$ e $\pi'' // \pi'''$ devono avere giacitura che contiene sia

$L(\bar{v}_1)$ che $L(\bar{v}_2)$ e dunque poiché $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ sono indep. devono avere giacitura $L(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Da questo segue $\pi = \pi'', \pi' = \pi'''$. $\square$



MUTUA POSIZIONE DI 2 RETTE IN $A_n(k)$

$$\alpha = [P, L(\bar{v}_1)] \quad \beta = [Q, L(\bar{v}_2)]$$



Si può rappresentare la $AX=B$ con ∞^1 soluzioni e un'incognita
 o " da $A'X=B'$ ∞^2 soluzioni e " " "

$$\begin{cases} rk(A) = rk(A|B) = n-1 \\ rk(A') = rk(A'|B') = n-1 \end{cases}$$

Mettiamo tutto a sistema per studiare cas.

$$\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \rightarrow$$

Parallelo

$\text{rk} \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$	$\text{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$	# sol.	geom.
$n-1$	$n-1$	∞^2 soluzioni	$\pi \cap \pi = \emptyset$
$n-1$	n	0 soluzioni	$\pi \parallel \pi, \pi \cap \pi = \emptyset$
n	n	1 soluzione	$\pi \cap \pi = \{P\}$
n	$n+1$	0 soluzioni	sgombrati

$((n-1), n)$ i sistemi omogenei in questo caso hanno le stesse soluzioni perché il sistema omog. associato ha ∞^2 sol. $\Rightarrow \pi \parallel \pi$

$(n, (n+1))$ il sistema omogeneo associato
ha come sola soluzione $\underline{0}$

$$\Rightarrow AX = \underline{0} \text{ è diverso da } A'X = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \cancel{r \neq 0} \text{ ed } r \cap s = \emptyset \Rightarrow r \text{ ed } s \text{ sghembe.}$$

posizione reciproca di 2 piani in $A_3(\mathbb{K})$

ricordando che in questo caso un piano è
descritto da $ax+by+cz+d=0$

dim che se 2 piani si intersecano in $A_3(\mathbb{K}) \Rightarrow$
hanno una retta in comune.