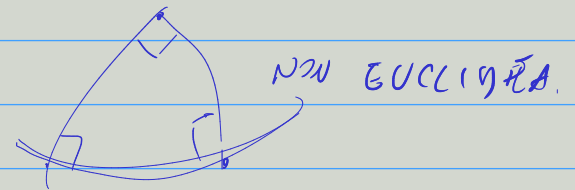


Algebra lineare $\longleftrightarrow$ Geometria Analitica
(Affine / Euclidea / Ampliata).

Geometria Affine
 $\uparrow$
studio di sistemi
lineari compatibili

$\rightarrow$ Geometria Euclidea



Teoria degli spazi vettoriali
su campi

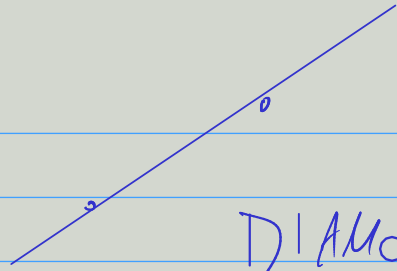
$\leftrightarrow$ Geometria
Euclidea

Ragionare in termini di punti e rette

Cosa è un punto?

Il termine punto non viene
definito se non in funzione dello

no proprietà rispetto gli altri
enti.



DIAMO DEGLI ASSIOMI CHE RAPPRESENTANO
LE PROPRIETÀ DEL NOSTRO MODELLO.

Def. Si dice spazio affine di dimensione n su di
un campo K una struttura algebrica

$$A_n(K) = AG(n, K) = (A, \boxed{V_n(K)}, f)$$

ove A = insieme non vuoto

$V_n(K)$ = spazio vettoriale di $\dim = n$ su K

$f: A \times A \longrightarrow V_n(K)$ tale che

$$(P_1) \quad \forall P \in A \quad \forall \vec{v} \in V_n(K) \quad \exists! Q \text{ tale che } f(P, Q) = \vec{v}$$

$$f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}.$$

Scriveremo anche $Q := P + \vec{v}$

$$(P2) \quad \forall P, Q, R \in A : f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

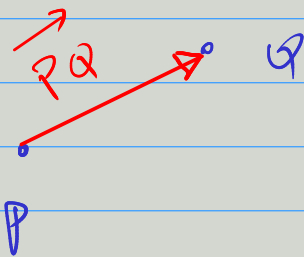
□

$A =$ insieme dei punti $\neq \emptyset$

$V_n(\mathbb{K})$ = spazio di traslazione

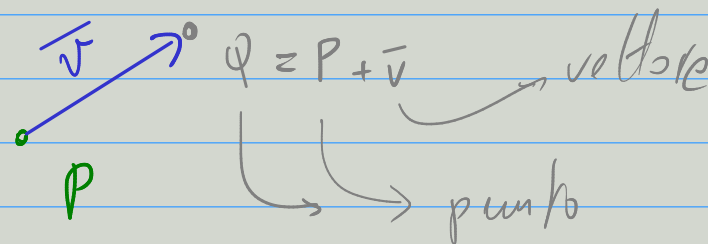
$\overrightarrow{PQ}$ = vettore di estremi P e Q

$P + \bar{v} =$ traslato del punto P secondo il vettore $\bar{v}$

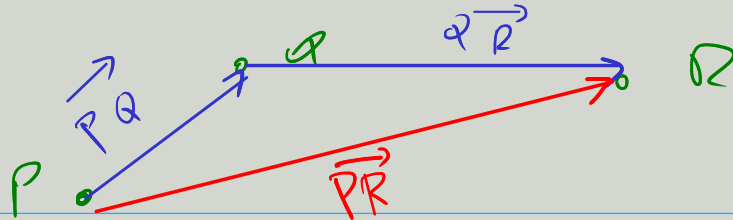


$$f: A \times A \rightarrow V_n(\mathbb{K})$$

(P1)



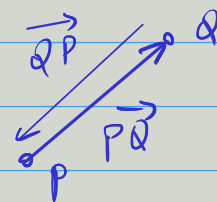
(P2)



Proposizione: valgono le seguenti proprietà

$$1) \quad \vec{PP} = \underline{0}$$

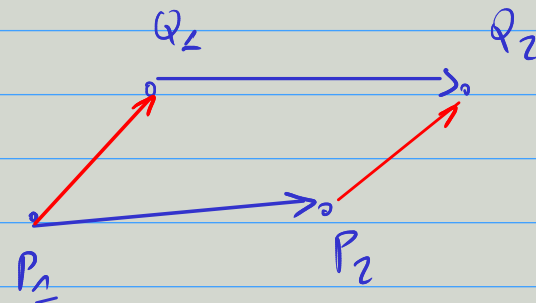
$$2) \quad \vec{PQ} = -\vec{QP}$$



$$3) \quad \vec{PQ} = \underline{0} \Leftrightarrow Q = P$$

$$4) \quad \vec{PQ} = \vec{PR} \Leftrightarrow Q = R$$

$$5) \quad \vec{P_1 P_2} = \vec{Q_1 Q_2} \Leftrightarrow \vec{P_1 Q_1} = \vec{P_2 Q_2}$$



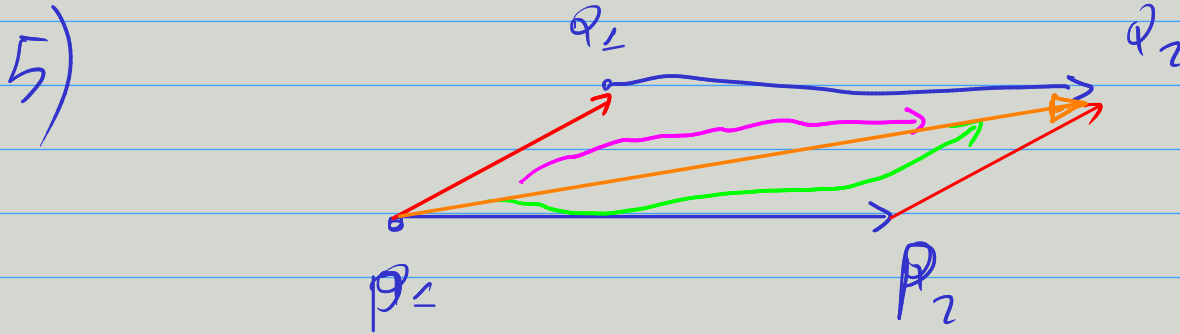
DIM: 1) $\vec{PP} = \vec{PP} + \vec{PP} \Rightarrow$ so the ends $\vec{PP} = \underline{0}$

$$2) \quad \vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \underline{0}$$

$$4) \quad \vec{PQ} = \vec{PR} \Rightarrow \vec{PQ} - \vec{PR} = \underline{0} \Rightarrow \vec{RP} + \vec{PQ} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \vec{RQ} = \underline{0} \Rightarrow R = Q$$

$$3) \quad \vec{PQ} = \vec{0} = \vec{PP} \Rightarrow \text{per } \hookrightarrow \quad P=Q$$



$$\vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 Q_1} = \vec{P_1 Q_1} + \vec{Q_1 Q_2} = \vec{P_1 Q_2}$$

Se $\vec{P_1 P_2} = \vec{Q_1 Q_2} \Rightarrow$ sottraendo $\vec{Q_1 Q_2}$ da $\vec{P_1 Q_2}$ si ha $\vec{P_2 Q_2} = \vec{P_2 Q_1}$

e viceversa $\square$

Definire la nozione di sottospazio affine.

$\boxed{S_m \subseteq A}$ tale che $(\underline{S_m}, \underline{W_m(\mathbb{K})}, \begin{matrix} W_m(\mathbb{K}) \\ \downarrow \\ S_m \times S_m \end{matrix})$

è uno spazio affine con $W_m(\mathbb{K}) \subseteq V_n(\mathbb{K})$

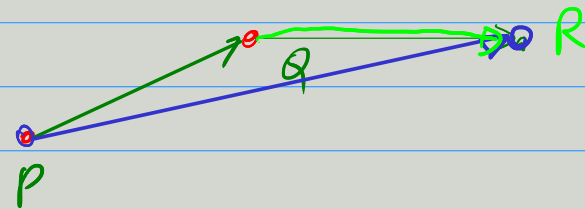
$\rightarrow$ SOTTOSPAZI LINEARI.

Def: Sia $A_n(\mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{K}), \ell)$ uno spazio affine
 $\forall \vec{v} \in V_n(\mathbb{K})$ consideriamo la funzione

$$\tau_{\vec{v}} \begin{cases} A \rightarrow A \\ P \rightarrow P + \vec{v} \end{cases}$$

questa funzione è detta traslazione (di vettore $\vec{v}$).

Teorema: Ogni traslazione è una iniezione
da $A \rightarrow A$.



DIM: Supponiamo: $\tau_{\vec{v}}(P) = \tau_{\vec{v}}(Q) = R \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} \overset{\vec{v}}{\Rightarrow} -\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{RQ} \Rightarrow P = Q$.

e quindi $\tau_{\vec{v}}$ è iniettiva.

viceversa supponiamo $R \in A \Rightarrow \exists Q$ tale che

$$\overrightarrow{RQ} = -\vec{v}$$

perché $\vec{v} \in V(I/K)$ e

quindi $-\vec{v} \in V(I/K)$

$\Rightarrow \tau(Q) = S$ tale

$$\text{che } \overrightarrow{QS} = \vec{v} = -\overrightarrow{RQ} = \\ = \overrightarrow{QR} \Rightarrow$$

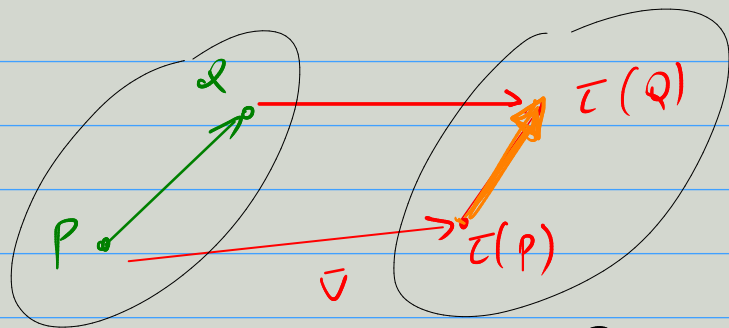
$$S = R \text{ e } Q$$

è preimmagine di R

$\Rightarrow \tau_v$ è suriettivo. $\square$

Siano $P, Q \in A$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$

$$\Rightarrow \tau_v(P) \tau_v(Q) = \vec{w}$$

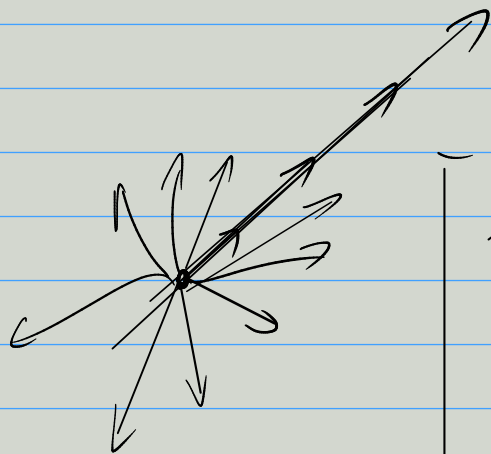


$$\overrightarrow{P\tau(P)} = \vec{v} = \overrightarrow{Q\tau(Q)}$$

$\Rightarrow$ per il Lemma $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\tau(P)\tau(Q)}$

Def. Sia $P \in A$ un punto e $W_m \subseteq V_n(I/K)$ un sottospazio vettoriale di $V_n(I/K)$. Si dice sottospazio lineare di origine P e mlt. di traslazione W_m

l'insieme $S_m = [P; W_m] := \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W_m \}$.



$\tau_{\bar{w}}(P)$

Teorema: Ogni sottospazio lineare è il supporto di un sottospazio affine ed ogni sottospazio affine ha per supporto un sottospazio lineare.

Utile i sottospazi lineari che sono più facili da gestire.

DIM. Sia $S_m = [P; W_m]$ un sottospazio lineare $\Rightarrow$
 $(S_m, W_m, f|_{S_m \times S_m}^{W_m})$ è un sottospazio affine.

l'unica cosa non ovvia è far vedere che
 $\forall R, Q \in S_m \quad f(R, Q) \in W_m$

e che $\forall R \in S_m, \forall \bar{w} \in W_m, R + \bar{w} \in S_m$.

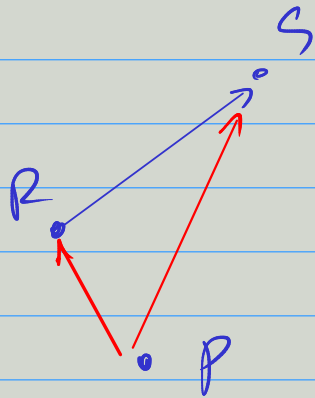
$$\text{Sic } Q = R + \bar{w} \Rightarrow \vec{PR} \in W_m \text{ per costruzione}$$

$$\vec{PR} + \vec{RQ} \in W_m$$

$$\text{perché } \vec{RQ} = \bar{w} \in W_m$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} \in W_m \Rightarrow Q = P + \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow Q \in S_m$$



$$\vec{PR} \in W_m \quad \vec{PS} \in W_m \Rightarrow$$

$$\vec{RS} = \vec{RP} + \vec{PS} = -\vec{PR} + \vec{PS} \in W_m$$

Viceversa sia $(S_m, W_m(1/k), f|_{S_m \times S_m}^{W_m(1/k)})$ un 2^o spazio
affine $\neq \emptyset$

prendiamo $P \in S_m$ e consideriamo

$$S'_m = [P; W_m]$$

costruiamo questo spazio lineare

OSSERVIAMO che $\forall Q \in S'_m : Q = P + \bar{w}$ con $\bar{w} \in W_m$
 $\Rightarrow Q \in S_m \Rightarrow S'_m \subseteq S_m$

Viceversa sia $Q \in S_m \Rightarrow \vec{PQ} \in W_m \Rightarrow$

$$Q = P + \vec{PQ}$$

e dunque $Q \in S'_m \Rightarrow S_m \subseteq S'_m \quad \square$

Oss: si vede che $\exists$ una biiezione fra i punti di

$S_m = [P, W_m]$ e i vettori di W_m

(perché ad ogni vettore di W_m corrisponde esattamente un punto di S_m e viceversa ad ogni

$Q \in S_m$ corrisponde esattamente un vettore $\vec{PQ}$).

$|S_m| = |W_m|$

possiamo rappresentare
anche i punti mediante
vettori

Def: In $A_n = (A, V_n(K), f)$ si dice reforcimento affine

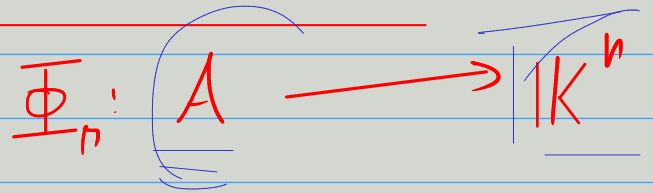
$\Gamma = (O, B)$ coppia ordinata ove

punto O = punto di A . (detto origine).

$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) =$ base (ordinata) di $V_n(K)$.

Serve ad introdurre coordinate

come?



funzione di
coordinatizzazione

che associa ad ogni punto $P \in A$
le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto
alla base B

oss Φ è iniettiva infatti $\forall \vec{v} \in K^n \quad \vec{v} = (v_1 \dots v_n)$

consideriamo $\tilde{v} = v_1 \bar{e}_1 + \dots + v_n \bar{e}_n$
e $v_i \in K$

ed il punto $O + \tilde{v}$ ha proprio coordinate
 $(v_1 \dots v_n)$

(Φ è suriettiva)

Se $\Phi(P) = \Phi(Q) \Rightarrow \vec{OP} = v_1 \bar{e}_1 + \dots + v_n \bar{e}_n = \vec{OQ} \Rightarrow P = Q$

(Φ è iniettivo).

□

Φ si comporta bene rispetto le f e rispetto le traslazioni.

Siano $P, Q \in A$, $\Gamma = (U, \mathcal{B})$ un rif. affino

$\Rightarrow$ il vettore $\vec{PQ}$ ha componenti rispetto

a $\mathcal{B}$ date da $\Phi(Q) - \Phi(P)$

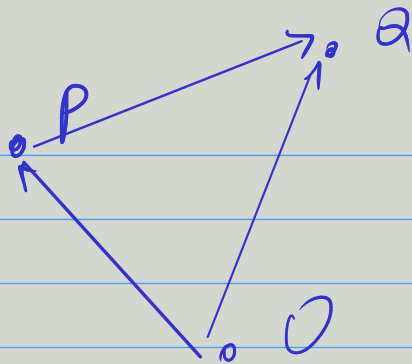
In particolare se $\vec{v} \in V_n(\mathbb{K})$ ha

componenti $\vec{v} = (v_1 \text{ --- } v_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$

e $P \equiv (p_1 \text{ --- } p_n)$ ha coordinate

rispetto a $\Gamma \Rightarrow$

$P + \vec{v}$ ha coordinate $(p_1 \text{ --- } p_n) + (v_1 \text{ --- } v_n)$
rispetto a Γ .



$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{PO} + \vec{OQ} = \\ &= -\vec{OP} + \vec{OQ}\end{aligned}$$

passando in componenti
rispetto B

$$\begin{aligned}&(-p_1 \text{ --- } -p_n) + (q_1 \text{ --- } q_n) \\ \Rightarrow \vec{PQ} \text{ ha componenti} \\ &\underline{\Phi(Q)} - \underline{\Phi(P)}\end{aligned}$$

Come conseguenza: se $P \equiv_r (p_1 \text{ --- } p_n)$ e

$\vec{v}$ ha componenti $(v_1 \text{ --- } v_n)$

Allora il punto $Q \equiv (p_1 + v_1 \text{ --- } p_n + v_n)$
 è tale che il vettore $\vec{PQ} = \vec{v} \Rightarrow Q$ è proprio il traslato

Quando si fissa un riferimento affine Γ ci riparo dimenticare
 degli specifici di A e della funzione f
 perché in coordinate ogni punto è rapp. da
 un elemento di $\mathbb{K}^n$ e dati due punti P, Q il
 vettore che li congiunge ha proprio come componenti
 $\underline{\Phi}_\Gamma(Q) - \underline{\Phi}_\Gamma(P)$ in $\mathbb{K}^n$

Def: Si dice dimensione di un sottospazio lineare

$$S_m = [P; W_m]$$

$$\text{cioè dim } W_m = m$$

Se $m=0 \Rightarrow S_m = \{P\}$ e diremo che è un punto identificandolo con P .

	$m=1$	$\Rightarrow S_m$ è detta retta	/
	$m=2$	$\Rightarrow S_m$ è detto piano	□
	$m=3$	$\Rightarrow S_m$ è detto solido	↗
	$m=n-1$	$\Rightarrow S_m$ è detto iperpiano.	

$$A_n = (A, V_n(K), f)$$