

$$AX=B$$

$$f_A \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ x \rightarrow Ax \end{cases}$$

risolvere
il sistema

$\equiv$

cercare, se c'è,
una preimmagine di B

OSS. Una funzione lineare $f: V \rightarrow W$ manda sequenze di generatori di V in sequenze di generatori di $\text{Im}(f) \subseteq W$

$$f(\sum_i \alpha_i \bar{e}_i) = \sum_i \alpha_i f(\bar{e}_i)$$

Se f è suriettiva $\Rightarrow f$ manda generatori di V in generatori di W .
(f suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = W \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim W$)

Non è vero che f in generale manda sequenze libere in sequenze libere.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightarrow (x, y) \end{cases}$$

$$f(100) = \underline{(10)} \quad f(010) = \underline{(01)} \quad f(001) = \underline{(00)}$$

Quando f manda $\forall$ sequenze libere in sequenze libere?

Quando f $\downarrow$ è iniettiva.

Sia $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ una base di V e allora

$(f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$ è una seq. di generatori di $\text{Im } f$

Se $\dim \text{Im } f < n \Rightarrow$ sicuramente $(f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$ è
legata. Se $\dim \text{Im } f = n \Rightarrow$ poiché $(f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$

è seq. di generatori $\Rightarrow (f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$ è libera
per Steinitz

f MANDA SEQUENZE LIBERE IN SEQ. LIBERE $\Leftrightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim V$.

→ / QUESTA CONDIZIONE IMPLICA $\ker f = \{ \underline{0} \}$ e conseguentemente
 $f: V \rightarrow W$ iniettiva

Lemma: Sia $f: V \rightarrow W$ una funzione e $\bar{w} \in \text{Im } f$.

Allora l'insieme delle preimmagini di $\bar{w}$ è dato da

$$\bar{v} + \ker f := \{ \bar{v} + \bar{v}' \in V \mid \bar{v}' \in \ker f \} \text{ con } f(\bar{v}) = \bar{w}$$

$$AX = B$$

$$X = X_0 + Z \text{ con } AX_0 = B \text{ e } AZ = 0$$

DIP:

$$f(\bar{v} + \bar{v}') = f(\bar{v}) + f(\bar{v}') = \bar{w} + \underline{0} = \bar{w}$$

Siano $\bar{v}, \bar{u}$ due preimmagini di $\bar{w}$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) - f(\bar{u}) = \underline{0} \Rightarrow \bar{u} - \bar{v} \in \ker f \Rightarrow$$

$$\bar{u} = \bar{v} + (\bar{u} - \bar{v}) \in \bar{v} + \ker f$$

$\in \ker f$

□

In particolare f è nulla $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

Teorema (nullità + rango). $f: V \rightarrow W$ lineare $\begin{matrix} \dim V < \infty \\ \dim W < \infty \end{matrix}$

$$\underbrace{\dim \text{Im } f}_{\text{rango di } f} + \underbrace{\dim \text{Ker } f}_{\text{nullità di } f} = \dim V$$

DIM. Sia $(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m)$ una base di $\text{Im } f$

e poniamo $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m = \text{reg. di}$
preimmagini in V di $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m$

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_m \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_s \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Im } f \\ \text{Ker } f \end{matrix}$$

Siamo poi $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s)$ una base di $\ker f$.

Consideriamo la sequenza $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s)$

ASSERTO $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s)$ è una base di V

↓

Sequenza di generatori per V

sequenza libera.

Mostriamo che $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s)$ è libera.

$$\text{Sia } \underline{0} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m + \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_s \bar{u}_s$$

con coeff. non tutti nulli

$$\Rightarrow \underline{0}_W = f(\underline{0}) = \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_m f(\bar{e}_m) + \beta_1 \underline{0} + \dots + \beta_s \underline{0}$$

md $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_m)$ è una seq libera $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Allora in V abbiamo

$$\underline{0} = 0 \cdot \bar{e}_1 + \dots + 0 \bar{e}_m + \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_n \bar{u}_n$$

ma gli $\bar{u}_i$ sono una seq. libera in V (base di Worf)

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

$(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ è libera in V .

Mostriamo che genera. Se per assurdo non generasse V

$\exists \bar{v}_1 \in V$ tale che $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n, \bar{v}_1)$ libera

$$\text{Sia } \bar{u} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m + \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_n \bar{u}_n + \gamma_1 \bar{v}_1 \quad \downarrow \gamma_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) &= \alpha_1 \bar{e}_1' + \dots + \alpha_m \bar{e}_m' + \gamma_1 f(\bar{v}_1) = \\ &= (\alpha_1 + \gamma_1 \delta_1) \bar{e}_1' + \dots + (\alpha_m + \gamma_1 \delta_m) \bar{e}_m' \end{aligned}$$

$$\text{ove } f(\bar{v}_1) = \delta_1 \bar{e}_1' + \text{---} + \delta_m \bar{e}_m'$$

$$f\left(\bar{u} - \left[(\alpha_1 + \gamma_1 \delta_1) \bar{e}_1 + \text{---} + (\alpha_m + \gamma_m \delta_m) \bar{e}_m\right]\right) = \underline{0}$$

$$\boxed{\bar{u} - \bar{u}' \in \text{Ker } f} \quad \bar{u}'$$

$$\text{con } \bar{u}' \in \mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m)$$

$$\bar{u} \in \mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m) + \text{Ker } f$$

$\Rightarrow \forall$ vettore di V appartiene a

$$\mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m) + \text{Ker } f$$

$$\text{Ne segue } \mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m) + \text{Ker } f = V$$

$$\dim \mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m) + \dim \text{Ker } f = \dim V$$

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V. \quad \square$$

CONSEGUENZA

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

oss

→

$$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{ \underline{0} \}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ è invertibile}$$

$\Leftrightarrow f$ manda seq. libero
in seq. libero.

NB basta dire che $\underline{0}$ ammette un'unica preimmagine
per sapere che $\forall \tilde{w} \in W$ ammette un'unica
preimmagine.

Tramando di sistemi lineari

$$AX = B$$

$$f_A(X) = B$$

Le preimmagini di B sono del tipo $X_0 + \operatorname{Ker} f_A$

ma gli elementi di $\ker f_A$ sono proprio gli

z tali che $f_A(z) = \underline{0}$ cioè $Az = \underline{0}$

$$\boxed{\dim \ker f_A = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = n - \operatorname{rk}(A)}$$

perché l'immagine è generata dalle
colonne della matrice A .

Legame con le matrici

- 1) il prodotto di matrici è associativo
- 2) Siano A e B due matrici tali che
 AB sia definita e supponiamo
 B quadrata e invertibile $\Rightarrow$
 $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(A)$
- 3) reinterpretare gli autovettori

U, V, W spazi vettoriali di dim k, m, n .

$$\dim U = k \quad \dim V = m \quad \dim W = n$$

e consideriamo due applicazioni lineari:

$$f: U \rightarrow \underbrace{V}_{\text{cod}} \quad \underbrace{g: \underbrace{V}_n \rightarrow W}_{\text{dom.}}$$

possiamo considerare $(g \circ f): U \rightarrow W$.

$$U \xrightarrow{f} \underbrace{V}_{\text{cod}} \xrightarrow{g} W$$

fissiamo 3 basi B_U, B_V, B_W e siano

$A \in \underline{\underline{K^{m \times k}}}$ matrice di f rispetto a B_U e B_V

$B \in \underline{\underline{K^{n \times m}}}$ matrice di g rispetto a B_V e B_W

$\Rightarrow$ la matrice di $(g \circ f)$ è
esattamente $BA \in \mathbb{K}^{n,k}$

// IL PRODOTTO DI MATRICE RAPPRESENTA
LA COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI //

BA rapp. una applicazione
lineare $U \rightarrow W$

Non verifica rapidamente che mi vettori di B_U
la matrice BA restituisce esattamente le
componenti rispetto B_W delle immagini.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi BA rappresenta $(g \circ f)$.

COROLLARIO: il prodotto di matrici è associativo.

DIM: la compos. di funzioni è associativa $\square$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad \text{funzioni lineari,}$$

$$(HG)F = H(GF) \quad \text{matrici.}$$

COROLLARIO: Supponiamo $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in GL(n, \mathbb{K})$.

$$\Rightarrow \text{rk}(AB) = \text{rk}(A) \quad f: X \rightarrow (AB) \setminus$$

$$\text{DIM:} \quad \text{rk}(AB) = \dim \text{Im}(f)$$

ma

$$f = (g \circ h)$$

ove g è rapp. da A
ed h da B .

perché B è invertibile e quindi

$$\ker B = \{0\} \quad \text{e} \quad h: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(B) = \dim \mathbb{K}^n - 0 = n$$

In particolare $\operatorname{Im}(B) = \mathbb{K}^n$.

Ne segue che ogni vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$ ammette preimmagine per h e dunque $\operatorname{Im}(g \circ h)$ contiene ricorrendo tutte le immagini mediate g dei vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$

cioè tutte le colonne della matrice A

$\Rightarrow \operatorname{Im}(g \circ h)$ è generato dalle colonne di A

e conseguentemente $\operatorname{rk}(AB) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f) =$

$$= \text{rk}(A) \longrightarrow (\# \text{ colonne di } A \text{ linearmente indep.})$$

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{h} \mathbb{K}^n \xrightarrow{g} \mathbb{K}^m$$

B

A

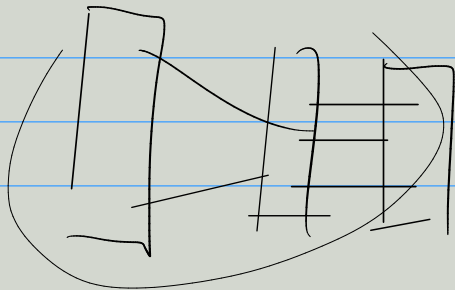
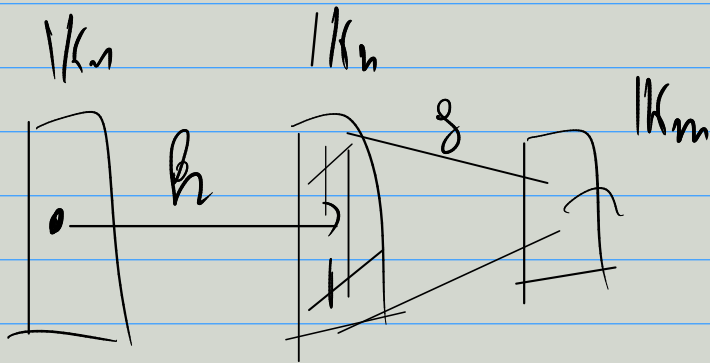
$$\text{Im}(h) = \mathbb{K}^n$$

quindi in $\text{Im}(g \circ h)$

ci saranno le immagini
di tutti i vettori di $\mathbb{K}^n$

perché $g \Rightarrow$ tutte le c. lineari
di colonne di A possibili

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(g \circ h) = \dim \text{Im}(g) = \\ = \text{rk}(A) \quad \square$$



$$\text{rk} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \right] = \underline{1}$$

$$AX = \lambda X$$

$$X \neq \underline{0}$$

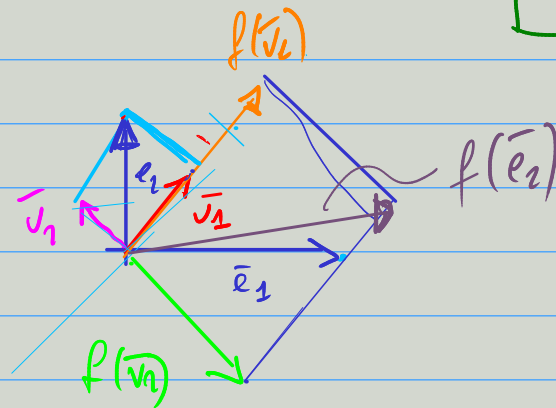
$$A \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$$(A - \lambda I) X = \underline{0}$$

$$X \rightarrow \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \rightarrow \lambda X$$

cercare una base di
autovettori corrisponde

o cercare una base di
"direzioni uniche" per la trasf. lineare associata.



$$\boxed{P^{-1}AP = D} \text{ cosa significa.}$$

Semplicemente è l'eq. della funzione che è associata ad A rispetto la base canonica espressa nei termini della base di autovettori.

$$f: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K}) \text{ lineare.}$$

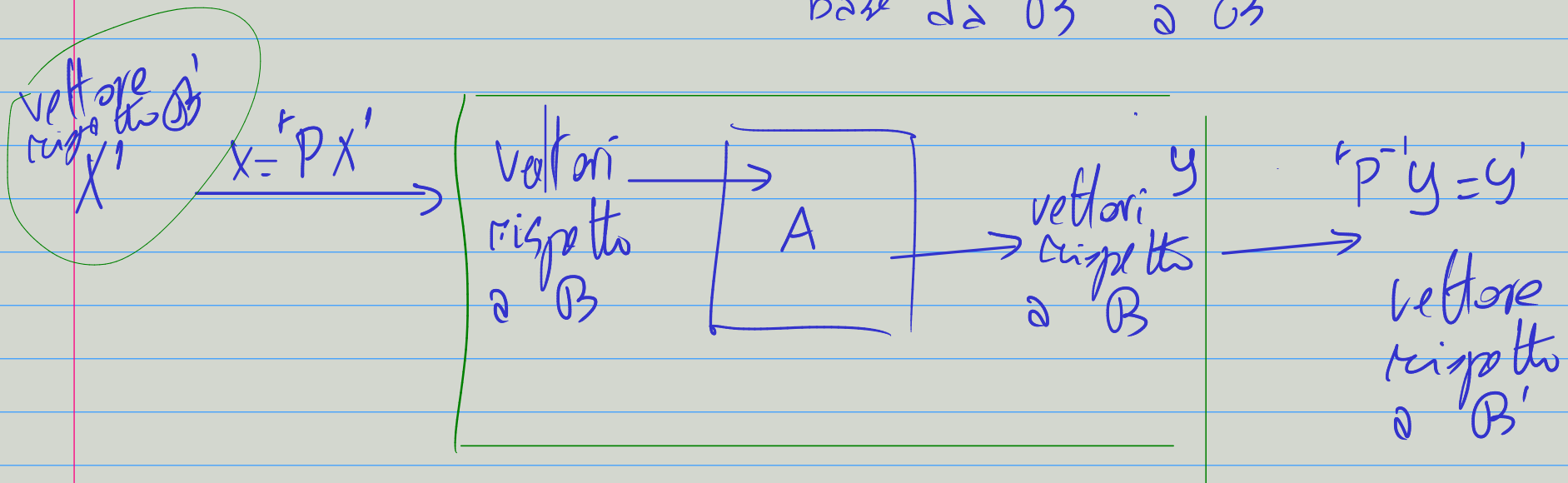
descritta da A rispetto la base canonica
(o comunque una base
fissata).

ci chiediamo se $\exists$ una base per cui f
ha una espressione particolarmente semplice.

Il cambiamento di base per matrici associate
a f.m. lineari è del tipo

$$A' \rightarrow {}^tP^{-1}AP$$

ove P è la matrice del cambiamento di
base da B a B'



$${}^tP^{-1}AP = A'$$

Matrici simili rappresentano la medesima trasformazione lineare /

| matrici basi differenti $\rightarrow$ cerchiamo la base in cui
è più semplice scrivere

$\rightarrow$ Se una diag. è una base
matrici cui sono diagonali

A volte si cercano basi in cui le matrici sono
"semplici" anche se non diagonali

Qualche cosa di nuovo $\rightarrow$ MINIMI QUADRATI / INTERPOLAZIONE

- 1) Spazi vettoriali
- 2) Sistemi lineari
- 3) Applicazioni lineari
- 4) Prodotti scalari

problema

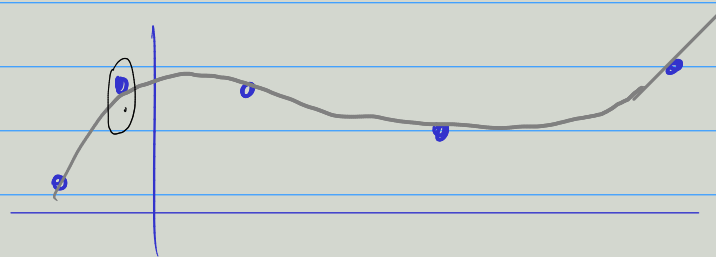
(x_i, y_i) coppie evento, valore.

cerchiamo una funzione ^{semplice} che rappresenti
i dati e consenta di fare delle "predizioni"

Un esempio è una funzione polinomiale

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

tale che $f(x_i) = y_i \quad \forall i$.



fenomeno di Runge.

$a_0, a_1, \dots, a_n$ non incognite.

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \\ \vdots \\ f(x_m) = y_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_m + \dots + a_n x_m^n = y_m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema lineare} \\ \text{in} \\ a_0 \dots a_n \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Teorema $\text{rk}(A) = m$ (matrice di Vandermonde).

→ OTTENGETE IL VOSTRO POLINOMIO.

∞^{n-m+1}

scegliete polinomi di grado al più $m-1$

problema $\rightarrow$ se il grado del polinomio è troppo grande
 $\Rightarrow$ si ottengono soluzioni che possono
essere poco significative.

AD ESEMPIO $\rightarrow$ se cerchiamo l'orbita di un asteroide
noi sappiamo che l'eq. deve avere
grado 2.

Se i dati (m dati) contengono errori
sperimentali $\Rightarrow$ il sistema potrebbe essere
non compatibile

Dall'altro canto se prendiamo polinomi di
grado $>$ $\Rightarrow$ il sistema non ha senso dal
punto di vista fisico.

$$AX = B$$

"Risolvere" i sistemi non compatibili

$$AX = B$$

$$f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

consideriamo $\text{Im}(f_A)$

se $B \in \text{Im}(f_A) \Rightarrow \text{ok}$

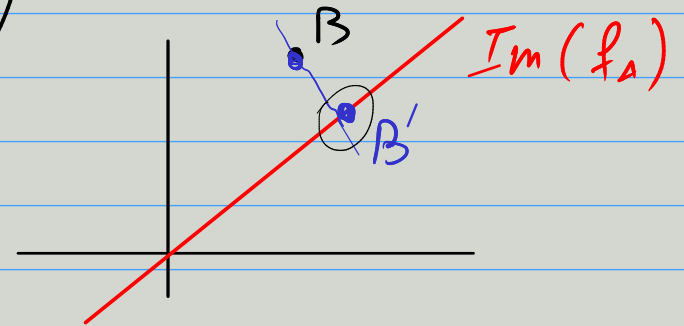
se $B \notin \text{Im}(f_A)$ il

sistema non si può risolvere ma possiamo provare

a risolvere $AX = B'$ con B' "vicino" a B

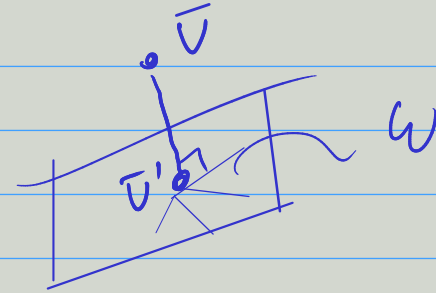
e $B' \in \text{Im } f_A$.

Problema trovare questo B'
1) risolvere il sistema



Def: Sia $W \subseteq V_n^0(\mathbb{R})$. Si dice $\forall \vec{v} \in V_n^0(\mathbb{R})$ proiezione ortogonale

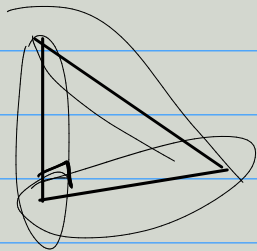
di $\bar{v}$ su W il vettore $\bar{v}'$ tale che
 $\bar{v} - \bar{v}' \in W^\perp$



Teorema: $\forall \bar{w} \in W, d(\bar{v}, \bar{v}') \leq d(\bar{v}, \bar{w})$

cioè $\bar{v}'$ è il punto di W a distanza euclidea minima da $\bar{v}$.

DIM $\|\bar{v} - \bar{w}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{v}' + \bar{v}' - \bar{w}\|^2 =$



$$\begin{aligned}
 & (\bar{v} - \bar{v}' + \bar{v}' - \bar{w}) \cdot (\bar{v} - \bar{v}' + \bar{v}' - \bar{w}) = \\
 & = (\bar{v} - \bar{v}') \cdot (\bar{v} - \bar{v}') + \cancel{(\bar{v} - \bar{v}') \cdot (\bar{v}' - \bar{w})}^{e W} + \\
 & \quad + \cancel{(\bar{v}' - \bar{w}) \cdot (\bar{v} - \bar{v}')}^{e W^\perp} + (\bar{v}' - \bar{w}) \cdot (\bar{v}' - \bar{w}) = \\
 & = \|\bar{v} - \bar{v}'\|^2 + \|\bar{v}' - \bar{w}\|^2 \geq \|\bar{v} - \bar{v}'\|^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

Invece che risolvere $AX=B$ risolveremo $AX=B'$
e questo minimizza $d(B, B')^2 =$
 $= \|B - B'\|^2$

(per questo si chiama soluzione ai
minimi quadrati).

Ph: come trovare B' ? Non lo troviamo $\rightarrow$ a uo serve
 X

In realtà a noi interessa X tale
che il vettore $(AX-B)$ sia ortogonale
ad $\text{Im } f_A$ perché $AX=B'$ in questo caso
tale che $(B'-B) \in (\text{Im } f_A)^\perp$

$$(AX - B) \in (\text{Im } f_A)^\perp \Leftrightarrow$$

$$\forall \text{ generatore } C_i \text{ di } (\text{Im } f_A)^\perp \Rightarrow {}^t C_i \cdot (AX - B) = 0$$

ma i generatori di $(\text{Im } f_A)^\perp$ sono
le colonne di $A^\perp \Rightarrow$ le eq. di
cui sopra diventano

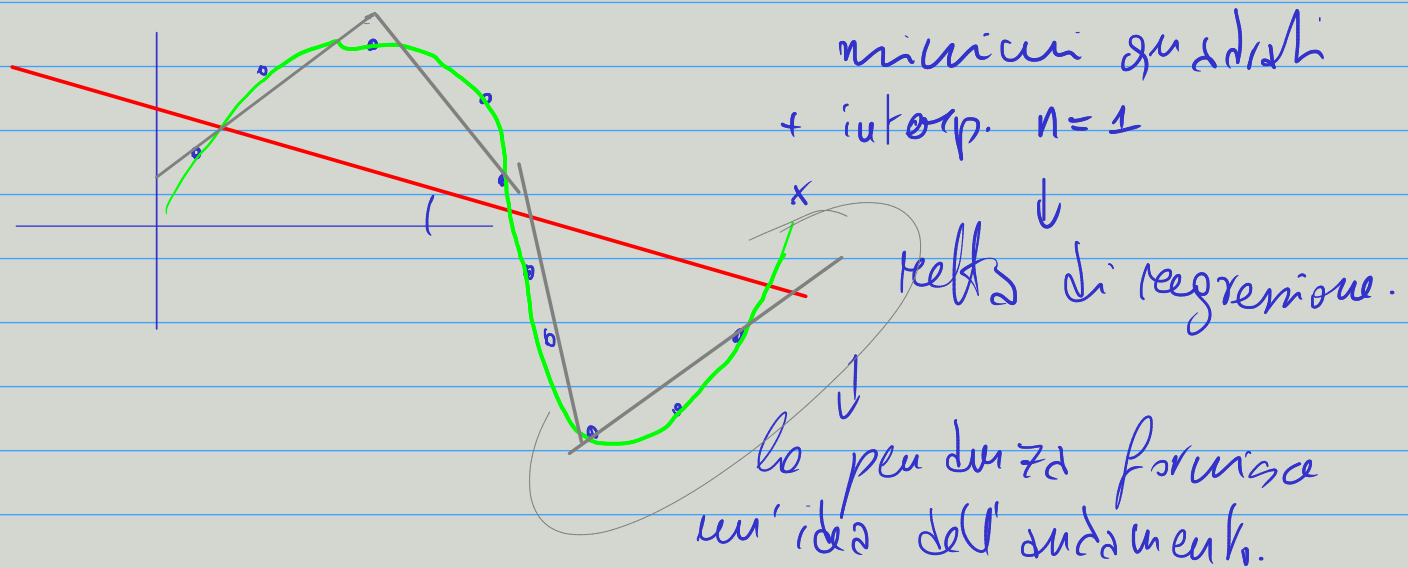
$${}^t A^\perp (AX - B) = \underline{0}$$

$$\text{cioè } \boxed{({}^t A^\perp A) X = {}^t A^\perp B} \quad (*)$$

$$AX = B$$

risolvere questo sistema lineare
corrisponde a risolvere si minimi
quadrati

Se possiamo sempre interpolare e risolvere ai minimi quadrati,
quali sono i parametri "ottimali"?



- 1) curve a tratti (spline) $n \geq 3$ $\ll$
 2) scegliere per l'interpolazione il polinomio di grado minimo
 per cui $\|B - B'\|$ rid sotto una certa soglia.

↓
 ha senso se sappiamo che l'evoluzione è descritta da
 un polinomio.
 $y = e^x$