

Prodotti scalari = forme bilineari e simmetriche
→ definite positive

ortogonale di un insieme.

$$X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$$

$$X^\perp = \{ \bar{v} \in V \mid \forall \bar{x} \in X : \bar{v} \cdot \bar{x} = 0 \}$$

$$\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$$

ma se il prod. scalare è definito positivo

$$1) \quad \mathcal{L}(X) \oplus X^\perp = V_n^0(\mathbb{R})$$

$$2) \quad X^{\perp\perp} = X$$

Se abbiamo $Y = \{ \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid AX = \underline{0} \}$

$$\Rightarrow Y^\perp = L(R_1 \text{ --- } R_m)$$

ove $R_1 \text{ --- } R_m$ sono le righe di A

perché ogni equazione si legge come

$$R_i \cdot X = 0$$

e quindi le soluzioni del sistema sono
date da $\{R_1 \text{ --- } R_m\}^\perp$

l'ortogonale di questo è $\{R_1 \text{ --- } R_m\}^{\perp\perp} =$
 $= L(R_1 \text{ --- } R_m)$. $\square$

CONSEGUENZA: Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare

in n incognite $\Rightarrow \dim S = n - \text{rk}(A)$

ove $S = \{X \mid AX = \underline{0}\}$.

Dim: $S = (R_1 \text{ --- } R_m)^\perp$ m_d

$$\dim S + \dim L(R_1 \text{ --- } R_m) = n$$

$$\Rightarrow \dim S = n - \dim L(R_1 \text{ --- } R_m) =$$

$$= n - \text{rk}(A) \quad \square$$

1) Prodotto scalare def. positivo $\Leftrightarrow$ rapp. da matrice reale
e simmetrica.

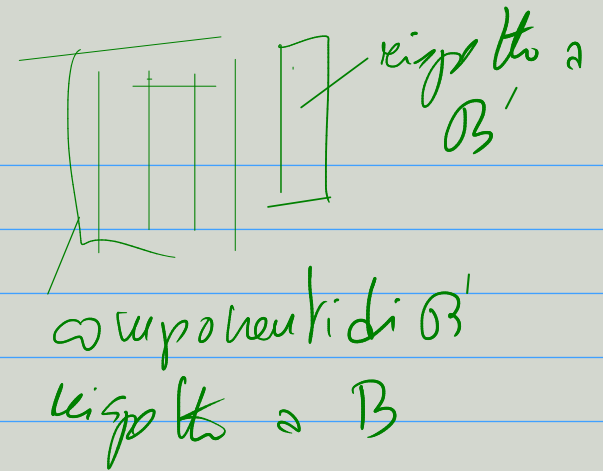
2) $\exists$ di basi ortonormali (per ϕ/S)

3) Cambiamento di base per forme bilineari

B, B' basi

P = matrice di
cambiamento di base
da B a B'

$$A' = {}^t P A P$$



oss. Sia P una matrice di cambiamento di base fra 2
basi ortonormali $\Rightarrow$ ${}^t P = P^{-1}$ cioè P è ortogonale

DIM: Rispetto a una base ortonormale la matrice del
prod. scalare è la matrice identità

$$A' = I = {}^t P A P = {}^t P I P = {}^t P P \Rightarrow {}^t P = P^{-1} \quad \square$$

In particolare sia le righe che le colonne di una

matrice ortogonale formano un sistema ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑

Le matrici ortogonali sono
importanti perché sono
facili da invertire.

Queste matrici entrano in gioco quando vogliamo diag. una
matrice reale e simmetrica.

Teorema della base spettrale:

Una matrice reale A è ortogonalmente diagonalizzabile

$$\Leftrightarrow A = {}^t A$$

DIM:

Supponiamo A ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$

$\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che

$$P^{-1}AP = D$$

$$\text{e } P^{-1} = {}^tP \Rightarrow {}^tPAP = D$$

$$\text{da cui } {}^t({}^tPAP) = {}^tD = D$$

$$\parallel \\ {}^tP {}^tA P$$

$$\Rightarrow {}^tP {}^tA P = {}^tPAP \quad \begin{array}{l} \text{moltiplicando a sx per } P \\ \text{a dx per } {}^tP \end{array}$$

$$\text{si deduce } {}^tA = P({}^tP {}^tA P)P = P({}^tPAP)P = A$$

e dunque A è simmetrica

Supponiamo ora $A = {}^tA$ e mostriamo che

$\exists P$ con ${}^tP = P^{-1}$ che diagonalizza A

DIM per induzione su $n = \text{ordine della matrice } A$

- $n = 1$: banale $\rightarrow A = {}^t A$ e la matrice è già diag e quindi ortogonalmente diag.

- $(n-1) \Rightarrow n$

Per ipotesi ${}^t A = A \Rightarrow$ gli autovalori di A sono tutti reali

Sia λ un autovalore di $A \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
e sia X un autovettore reale per λ .

$\Rightarrow X \neq 0$ quindi possiamo sostituire
ad X il vettore $\frac{1}{\|X\|} X$ se $\|X\| \neq 0$
ed otteniamo ancora un autovettore

(le norme la calcoliamo rispetto al prod. scal. std. di $\mathbb{R}^n$).

Adesso completiamo (X) a base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$$\rightarrow \underbrace{(X \quad X_2 \quad \dots \quad X_n)}_{\text{vettori colonna}} = P_0$$

$\Rightarrow P_0$ è una matrice ortogonale

$\Rightarrow$ calcolo $P_0^{-1} A P_0 = {}^t P_0 A P_0 =$

$$= \begin{pmatrix} {}^t X \\ {}^t X_2 \\ \vdots \\ {}^t X_n \end{pmatrix} A (X \quad X_2 \quad \dots \quad X_n) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} {}^t X A \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} A X \end{pmatrix} = \\ &= S^t X \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t X A X & {}^t X A X_2 & \cdots & {}^t X A X_n \\ {}^t X_2 A X & & & \\ \vdots & & & \\ {}^t X_n A X & & & {}^t X_n A X_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} S^t X X & S^t X X_2 & \cdots & S^t X X_n \\ S^t X_2 X & & & \\ \vdots & & & \\ S^t X_n X & & & \end{pmatrix} =$$

C

$$= \begin{pmatrix} \boxed{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\text{diagonal } C} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

C

$n-1$

$n-1$

$${}^t X X = \|X\| = 1$$

$${}^t X \cdot X_i = 0$$

see 17, 2

oss $C = {}^t C$ infatti contiene dei prodotti scalari del
tipo ${}^t X_i A X_j$ con $A = {}^t A$

$${}^t X_i A X_j = {}^t ({}^t X_i A X_j) = {}^t X_j {}^t A X_i = {}^t X_j A X_i$$

$\Rightarrow$ Quindi C è reale e simmetrica e $(n-1) \times (n-1)$

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\exists Q$ tale che

$${}^t Q = Q^{-1} \text{ e}$$

$${}^t Q C Q = D' \text{ matrice diagonale.}$$

polinomio $P_1 =$

1	0
0	Q

e osserviamo che ${}^t P_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) P_1 =$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^t P_1 C P_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array} \right)$$

quindi $\underline{({}^t P_2 {}^t P_0) A P_0 P_1 = D}$ matrice diagonale

adesso sia $P_2 = P_0 P_1 \Rightarrow {}^t P_2 A P_2 = D$

inoltre ${}^t P_2 \cdot P_2 = ({}^t P_2 {}^t P_0)(P_0 P_1) = {}^t P_2 I P_1 =$
 $= {}^t P_1 P_1 = I$ 

quindi ${}^t P_2 = P_2^{-1} \Rightarrow P_2^{-1} A P_2 = D$

con P ortogonale

□

N.B in generale

$${}^tBAB \neq B^{-1}AB$$

□

N.B Se P ortogonale $\Rightarrow \det P = \pm 1$

autotri

$$\det(I) = 1 = \det(P^{-1}P) =$$

$$= \det({}^tP \cdot P) =$$

$$= \det({}^tP) \cdot \det(P) =$$

$$= [\det(P)]^2.$$

CONSEGUENZA: Le matrici che rappresentano un prod scalare sono tutte diagonalizzabili.

In particolare si dice segno di un prod

scalare la seq. dei segni $-$, 0 , $+$
dei suoi autovalori,
Il prodotto scalare è definito positivo
 $\Leftrightarrow$ la sua segnatura è $(+ \text{ --- } +)$

In teoria della relatività si usano prod.
scalari con segnatura $(+ \text{ --- } -)$

Condiziamo di spiegare a cosa serve tutto ciò
e perché e donde vengono le matrici
 $\rightarrow$ Reinterpretiamo cose già viste

Applicazioni lineari

Siano V, W due sp. vettoriali su K

Def $f: V \rightarrow W$ è lineare se

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})$$

f manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari.

Def $\text{Hom}(V, W) := \{ f: V \rightarrow W \mid f \text{ lineare} \}$

Oss: $\text{Hom}(V, W)$ è uno spazio vettoriale su K

minipetto la somma

$$(f + g) := \begin{cases} V \rightarrow W \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$(a \cdot f) := \begin{cases} V \rightarrow W \\ x \mapsto a f(x) \end{cases}$$

$$(f+g)(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) =$$

$$[f(\alpha x) + g(\alpha x)] + [f(\beta y) + g(\beta y)] \\ = \alpha \cdot (f+g)(x) + \beta (f+g)(y) =$$

DOMANDA: quanto vale $\dim \text{Hom}(V, W)$?

ci possiamo la domanda quando
 $\dim V = n < \infty$ $\dim W = m < \infty$

[spoiler] $\text{Hom}(V, W) \cong K^{m,n}$ e quindi $\dim \text{Hom}(V, W) = mn$

$\dim V = n$ $\dim W = m$

Fissiamo una base $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ di V e una base
 $B' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m)$ di W .

$f: V \rightarrow W$ lineare

Si ha $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ il generico vettore di V
e consideriamo $f(\bar{v}) = \bar{w} \in W$

$$f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) =$$

$$= \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \alpha_2 f(\bar{e}_2) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{e}_i)$$

Il valore di $f(\bar{v})$ dipende solo dalle componenti α_i di $\bar{v}$ rispetto a B e dai valori di $f(\bar{e}_i)$

Scriviamo ora $\forall i=1, \dots, n$ $f(\bar{e}_i) = \alpha_{1i} \bar{e}'_1 + \dots + \alpha_{mi} \bar{e}'_m$
 $\in W$

$$f(\bar{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \bar{e}'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_{ji} \bar{e}'_j \quad (*)$$

Prima di le componenti di $f(\bar{v})$ rispetto B generico vettore
dipendono solo dalle entrate della matrice

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

→ ogni funzione lineare si rappresenta rispetto le basi
 B, B' mediante una matrice $m \times n$

Non solo — rileggendo la formula

$$f(\bar{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \bar{e}'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i a_{ji} \bar{e}'_j \quad (*)$$

vediamo che posto $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ componenti di $f(\bar{v})$ rispetto B'

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ componenti di $\bar{v}$ rispetto a B .

$$\boxed{y = AX} \rightarrow \ell$$

Fissate B, B'

Ad ogni applicazione lineare f corrisponde esattamente una matrice $A \in K^{m,n}$

Viceversa data una matrice $A \in K^{m,n} \exists!$ applicazione lineare

$$f: V \rightarrow W$$

che ha A come rappresentante. $\swarrow$ questo

$$f(\bar{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \bar{e}'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i a_{ji} \bar{e}'_j \quad (*)$$

In particolare $\exists$ una biiezione fra $\text{Hom}(V, W)$ e $K^{m,n}$

Esercizio: dimostrare che la funzione che fissa B e B' associa ad ogni f : la corrispondente matrice è un isomorfismo.

Ad ogni applicazione lineare possiamo associare?
sottospazi

$$f: V \rightarrow W$$

Def Si dice $\text{Im}(f) := \{ \bar{w} \in W \mid \exists \bar{v} \in V \text{ con } f(\bar{v}) = \bar{w} \}$

$$\text{Ker}(f) := \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0}_W \}$$

$$\text{Ker} = \text{kernel}$$

Teorema 1) $\rightarrow \text{Im}(f) \subseteq W$

2) $\rightarrow \text{Ker } f \subseteq V$

DIM:

1) Sia $\bar{a}, \bar{b} \in \text{Im}(f)$ $\alpha, \beta \in K$

$$\Rightarrow \exists \bar{u}, \bar{v} \in V ; \bar{a} = f(\bar{u}) \quad \bar{b} = f(\bar{v})$$

$$\begin{aligned} f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) &= \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) = \\ &= \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \in \text{Im}(f) \end{aligned}$$

2) Sia $\bar{u}, \bar{v} \in \text{Ker } f$ $\alpha, \beta \in K$

$$\Rightarrow f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in \text{Ker } f$$

□

Teorema (nullità + rango) $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$
[DOMANI]

Rappresentazione dei sistemi lineari

$$AX = B \quad A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

interpretazione AX come funzione lineare

$$f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Cercare } X: f_A(X) = B$$

Il sistema ammette soluzioni $\Leftrightarrow B \in \operatorname{Im}(f_A)$

$\Leftrightarrow$ B è combinazione lineare dei generatori dell'immagine di $f_A \rightarrow$ ma i generatori di questa immagine sono proprio le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$ e queste sono le colonne di $A \Leftrightarrow$

Il sistema è risolubile $\Leftrightarrow B \in \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{Rk}(C_1 \dots C_n) = \mathcal{Rk}(C_1 \dots C_n | B)$$

Rouché-Capelli.

