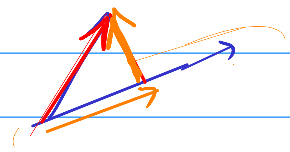
# Forme bilineari.

$V_n(\mathbb{K})$



## Def. Forma lineare.

Sia $f: V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una funzione lineare
cioè tale che
$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K},\ \forall \bar{v},\bar{w} \in V:\ f(\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})=\alpha f(\bar{v})+\beta f(\bar{w}).$$

Allora $f$ è detta forma lineare.

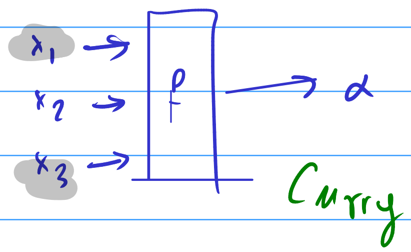
**Def:** Si dice forma n-multilineare $n \geq 2$

una funzione $f: \underbrace{V \times V \_\_ \times V}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$

tale che comunque fissati $(n-1)$ input di $f$

la forma
$$f^{i}_{(x_1 \_\_ x_{n-1})} \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{v} \to f(x_1 \_\_ x_{i-1}\, \bar{v}\, x_{i+1} \_\_ x_{n-1}) \end{cases}$$

è lineare $\forall i$




$\mathbb{K}^3$

$$f: ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)) =$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Il determinante é una funzione n-multilineare da $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ #

ADD$(x,y)$ PLUSONE$(x) =$ ADD$(x,1)$

**Def** Una forma n-multilineare é detta simmetrica se comunque si permutino gli input il valore non cambia. É detta alternante se qualora 2 input siano uguali il valore della forma é 0

BILINEARE E SIMMETRICA $f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y},\bar{x}) \ \forall \bar{x},\bar{y} \in V$

" E ALTERNANTE $f(\bar{x},\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in V$

$\downarrow$

si dimostra (come abbiamo fatto con i determinanti) che $f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y},x) \ \forall \bar{x},\bar{y} \in V$

$$0 = f(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) = \cancel{f(\bar{x},x)} + \cancel{f(\bar{y},\bar{y})} + f(\bar{x},\bar{y}) + f(\bar{y},x)$$

La definizione di determinante é

"l'unica forma n multilineare alternante su $\mathbb{K}^n$ che vale 1 sulla base canonica"

Quante sono le forme bilineari?

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale di dim $= n$ su $\mathbb{K}$. e sia

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \_\_ \bar{e}_n)$ una sua base

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists \, a_1 \_\_ a_n : \quad \bar{v} = a_1\bar{e}_1 + \_\_ + a_n\bar{e}_n$

$\bar{w} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \bar{w} = \beta_1\bar{e}_1 + \_\_ + \beta_n\bar{e}_n$

Sia $f: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare

$$\Rightarrow \quad f(\bar{v},\bar{w}) = f\left(\sum_i \alpha_i \bar{e}_i, \sum_j \beta_j \bar{e}_j\right) = \sum_i \alpha_i f\left(\bar{e}_i, \sum_j \beta_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$$

I valori di $f$ dipendo solo dai coeff.

$$a_{ij} = f(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$$

e le componenti di $\bar{v}$ e $\bar{w}$ rispetto $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 - \bar{e}_n)$.

Pongo $\quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & \cdots & f(\bar{e}_1,\bar{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\bar{e}_n,\bar{e}_1) & \cdots & f(\bar{e}_n,\bar{e}_n) \end{pmatrix}$

Ad ogni forma bilineare, fissata una base posso associare una matrice che la descrive

osservo che $\quad (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

determina, per le proprietà del prodotto righe per colonne, una forma bilineare.

infatti $\quad (\lambda\, {}^t X + \mu\, {}^t Y) A Z = \lambda({}^t X A Z) + \mu({}^t Y A Z)$

e stessa cosa per ${}^t X A (\lambda Y + \mu Z) = \lambda\, {}^t X A Y + \mu\, {}^t X A Z$

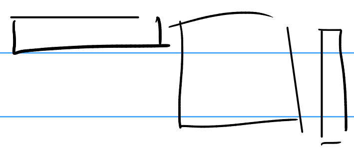
inoltre è una forma bilineare che in $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$ vale tanto quanto $f(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$.

$$f(\bar e_1,\bar e_1) = (1\ 0 \cdots 0)\, A \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} = a_{11} = f(\bar e_1,\bar e_1).$$

$$f(\bar e_1,\bar e_2) = (1 \cdots 0)\, A \begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots \\0\end{pmatrix} = a_{12} = f(\bar e_1,\bar e_2)$$

Sia $A$ la matrice della forma $f$ rispetto la base $\mathcal{B} = (\bar e_1 \cdots \bar e_n)$ e siano $X = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ due vettori colonna le cui entrate sono le componenti dei vettori $\bar v = \sum_i \alpha_i \bar e_i$ $\quad \bar w = \sum_j \beta_j \bar e_j$

$$\Rightarrow \quad f(\bar v,\bar w) = {}^tX A Y$$



<u>oss</u>: $f$ é simmetrica $\Leftrightarrow A = {}^tA$

Dim Se $f$ é simmetrica $\Rightarrow f(\bar e_i,\bar e_j) = f(\bar e_j,\bar e_i)$

$$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow {}^tA = A$$

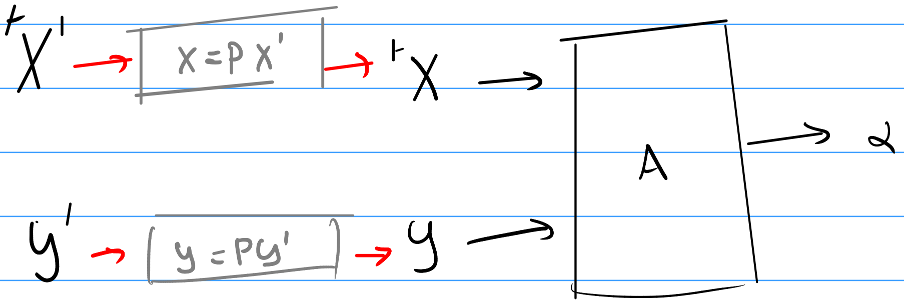
Viceversa, supponiamo $\underline{A = {}^tA}$

$$\Rightarrow \underbrace{({}^tXAY)}_{f(\bar u,\bar v)} = {}^t({}^tXAY) = {}^tY\,{}^tAX = \underbrace{{}^tYAX}_{f(\bar v,\bar u)}$$

e quindi $f$ é simmetrica. $\square$

Esercizio: $f$ é alternante $\Leftrightarrow {}^tA = -A$ $\square$

DOMANDA: Come cambia la matrice $A$ al variare della base $\mathcal{B}$?




P matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

CAMBIO DI BASE

vettori delle componenti di $\bar{u}$ e $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$

vettori delle componenti di $\bar{u}$ e $\bar{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}$

$${}^tX = {}^t(PX')$$

$$y = (Py')$$

$$f(\bar{u},\bar{v}) = {}^tX A y = {}^t(PX') A (Py') =$$

$$= {}^tX' \underbrace{{}^tP A P}_{A'} y' = {}^tX' A' y$$

$$\boxed{A' = {}^tPAP}$$

N.B. In generale $A'$ non è simile ad $A$: c'è ${}^tP$ non $P^{-1}$

Def. Sia $f$ una forma bilineare simmetrica.

si dice forma quadratica associata ad $f$ la funzione

$$q : \begin{cases} V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \bar{v} \to f(\bar{v},\bar{v}). \end{cases}$$

Un vettore $\bar{v}$ è detto isotropo se $q(\bar{v}) = 0$

OSS: Se $2 \neq 0 \Rightarrow$ data $q$ si può ricostruire $f$

$$q(\bar v+\bar w) = f(\bar v+\bar w,\bar v+\bar w) = f(\bar v,\bar v)+f(\bar v,\bar w)+f(\bar w,\bar v)+f(\bar w,\bar w)=$$

$$= q(\bar v)+2f(\bar v,\bar w)+q(\bar w) \Rightarrow$$

$$f(\bar v,\bar w)=\frac{1}{2}\big(q(\bar v+\bar w)-q(\bar v)-q(\bar w)\big)$$

**Def:** Una forma bilineare simmetrica è detta prodotto scalare.

In generale scriverò $\bar v\cdot\bar w$ invece che $f(\bar v,\bar w)$

$\langle \bar v,\bar w\rangle$ in fisica

$\langle \bar v|\bar w\rangle$

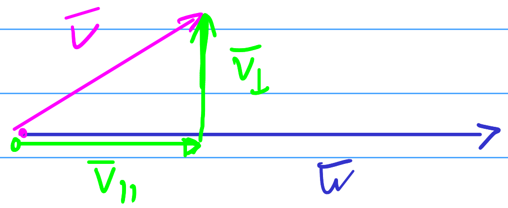
**Def:** Due vettori sono detti ortogonali $\bar v\perp\bar w$
perp(endicolare)

se $\bar v\cdot\bar w=0$

**Teorema:** Siano $\bar v,\bar w\in V(\mathbb{K})$ due vettori.
e supponiamo $\bar w\cdot\bar w\neq 0$

Allora $\exists\ \bar v_{\parallel},\bar v_{\perp}\in V(\mathbb{K})$ tali che

$$\bar v=\bar v_{\parallel}+\bar v_{\perp} \quad e \quad \bar v_{\parallel}=\alpha\bar w \quad \bar v_{\perp}\cdot\bar w=0$$




**DIM:** poniamo $\bar v_{\parallel}=\dfrac{\bar v\cdot\bar w}{\bar w\cdot\bar w}\bar w$ $\qquad \bar v_{\perp}=\bar v-\bar v_{\parallel}$

infatti $\bar v_{\perp}\cdot\bar w=\bar v\cdot\bar w-\dfrac{\bar v\cdot\bar w}{\bar w\cdot\bar w}\bar w\cdot\bar w=0$ $\square$

**Def:** Il valore $\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{v}$ lungo $\bar{w}$.

- Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**Def.** Un prodotto scalare su $V(\mathbb{R})$ è detto definito positivo se

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \bar{v} \in V(\mathbb{R}) \quad \bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0 \\ e \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{0} \end{array}}$$

**Def:** Uno spazio vettoriale $V(\mathbb{R})$ con prodotto scalare definito positivo è detto spazio vettoriale euclideo e si denota con $V^{\circ}(\mathbb{R})$.

In uno spazio Euclideo si dice norma di un vettore $\bar{v}$ il numero

$$\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$$

**N.B.** $\|\alpha \bar{v}\| = \sqrt{\alpha \bar{v} \cdot \alpha \bar{v}} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$.

$\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$ $\qquad$ $\|\bar{v}\| \geq 0$

Se $\bar{w} = \alpha \bar{v} \Rightarrow \|\bar{w}\| = |\alpha| \, \|\bar{v}\|$

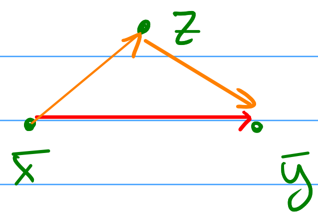
**Def:** Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Si dice che $V(\mathbb{K})$ è uno spazio metrico con distanza $d: V \times V \to \mathbb{R}$

se $d$ soddisfa le seguenti proprietà

1) $d(\bar{x},\bar{y}) \geq 0 \quad \forall\, \bar{x},\bar{y} \in V$ e $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$

2) $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

3) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$ disuguaglianza triangolare




Teorema: se abbiamo un prod. scalare def pos.

$d(\bar{x},\bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\|$ è una funzione distanza.