

Sistema di Generatori per uno spazio vettoriale.

$$S \subseteq V(K) \quad \mathcal{L}(S) = V$$

$$\text{Sia } W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad \{(x, y, z, t) \mid x + 2y = 0\} =$$

$$= \{(2y, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y(-2 \ 1 \ 0 \ 0) + z(0 \ 0 \ 1 \ 0) + t(0 \ 0 \ 0 \ 1) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}((-2 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1))$$

$$S = \{(-2 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1)\}$$

$$S' = \{(2 \ -1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 1), (0 \ 0 \ 2 \ 1), (0 \ 0 \ 0 \ 1)\}$$

$$S'' = \{(2 \ -1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 1), (0 \ 0 \ 0 \ 1)\}$$

$$\text{Sia } (-2y, y, z, t) \in W \Rightarrow \text{rappresentazione}$$

$$(-2y \ y \ z \ t) = \alpha(-2 \ 1 \ 0 \ 0) + \beta(0 \ 0 \ 1 \ 0) + \gamma(0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$= \alpha'(-2 \ 1 \ 0 \ 0) + \beta'(0 \ 0 \ 1 \ 0) + \gamma'(0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$\gamma = t = \gamma' \quad \alpha = y = \alpha' \quad \beta = z = \beta'$$

$$(-2y \ y \ z \ t) = \alpha(2 \ -1 \ 0 \ 0) + \beta(0 \ 0 \ 1 \ 1) + \gamma(0 \ 0 \ 2 \ 1) + \delta(0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$\alpha'(2 \ -1 \ 0 \ 0) + \beta'(0 \ 0 \ 1 \ 1) + \gamma'(0 \ 0 \ 2 \ 1) + \delta'(0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$\alpha = -y = \alpha' \quad \beta + \gamma = z = \beta' + \gamma' \quad \beta + \gamma + \delta = t = \beta' + \gamma' + \delta'$$

$$\begin{aligned} \gamma=0 &\Rightarrow \beta=z & \delta=t-z \\ \gamma=1 &\Rightarrow \beta=z-2 & \delta=t-1-z+2 \end{aligned}$$

Def. Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale. Una sequenza $B \subseteq V(K)$ di vettori di $V(K)$ è detta base se ogni vettore di $V(K)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B .

I coeff. dei vettori di B che danno un $\bar{v} \in V(K)$ sono detti componenti di $\bar{v}$ rispetto a B

Example

$\mathbb{R}^3$

BASE canonica

$$B = \left(\underset{\bar{e}_1}{(1\ 0\ 0)}, \underset{\bar{e}_2}{(0\ 1\ 0)}, \underset{\bar{e}_3}{(0\ 0\ 1)} \right)$$

$$(x\ y\ z) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$$

↓
componenti di $(x\ y\ z)$ rispetto
la base canonica (x, y, z) .

$$B' = \left(\underset{\bar{v}_1}{(1\ 0\ 0)}, \underset{\bar{v}_2}{(0\ 0\ 1)}, \underset{\bar{v}_3}{(0\ 1\ 0)} \right)$$

$$(x\ y\ z) = x \cdot \bar{v}_1 + z \cdot \bar{v}_2 + y \bar{v}_3$$

↓
componenti (x, z, y)
rispetto a B'

$$B'' = \left(\underset{\bar{w}_1}{(2\ 0\ 0)}, \underset{\bar{w}_2}{(0\ 1\ 0)}, \underset{\bar{w}_3}{(0\ 1\ 1)} \right)$$

$$(x\ y\ z) = \alpha \bar{w}_1 + \beta \bar{w}_2 + \gamma \bar{w}_3$$

$$= (2\alpha\ \beta+\gamma\ \gamma) \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}x \\ \beta &= y - \gamma = y - z \\ \gamma &= z \end{aligned}$$

$(x, y, z) \rightarrow \text{componenti } (\frac{1}{z}x, y-z, z)$

AL VARIARE DELLA BASE CAMBIANO le componenti

$V(\mathbb{R}) = \text{sp. vettoriale delle frecce}$

$$B = \left\{ \uparrow, \rightarrow \right\}$$

$$\nearrow = \alpha \uparrow + \beta \rightarrow \quad (\alpha, \beta)$$

Def. Una sequenza di vettori $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ di $V(\mathbb{K})$ è detta libera se l'unica combinazione lineare dei suoi elementi che dà $\underline{0}$ è quella a coeff. tutti 0.

$$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \text{ libera} \equiv \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

^T Una sequenza che non è libera è detta legata

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è legata se esiste almeno una combinazione lineare a coeff. non tutti 0 che dà $\underline{0}$

Teorema: Una sequenza $B \subseteq V(\mathbb{K})$ è una base se e solo se B è una sequenza libera di generatori.

DIM: Supponiamo B base. Allora ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c. lineare degli elementi di B

$\Rightarrow B$ è sequenza di generatori.

Ogni vettore (incluso $\underline{0}$) si scrive in modo unico $\Rightarrow B$ è anche libera.

Viceversa B di generatori $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ogni vettore di $V(K)$ è

comb. lineare degli elementi di B .

$\rightarrow$ facciamo vedere che B

libera $\Rightarrow \forall$ vettore si scrive in modo unico

per assurdo

$$\bar{V} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$$B = (v_1 \dots v_n)$$

$$= \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

$$\underline{0} = \bar{V} - \bar{V} = (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n) - (\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n) =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \bar{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{v}_n$$

La seq. è libera $\Rightarrow$

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0$$

$\vdots$

$$\alpha_n - \beta_n = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_2$$

$\vdots$

$$\alpha_n = \beta_n$$

$\downarrow$

□

Sequenza di generatori $\begin{cases} \text{LIBERA} \rightarrow \text{BASE} \\ \text{LEGATA} \\ \emptyset \end{cases}$

Lemma: Una sequenza S è legata $\Leftrightarrow$ almeno uno dei vettori di S è comb. lineare

dei rimanenti.

DIM. Sia $S = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ legata

$\Rightarrow \exists$ c. lineare $\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0$ con $\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow \exists \alpha_i^{-1} \in K$ e scivolo

$$\alpha_i \bar{v}_2 = -(\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = -\alpha_i^{-1} (\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n)$$

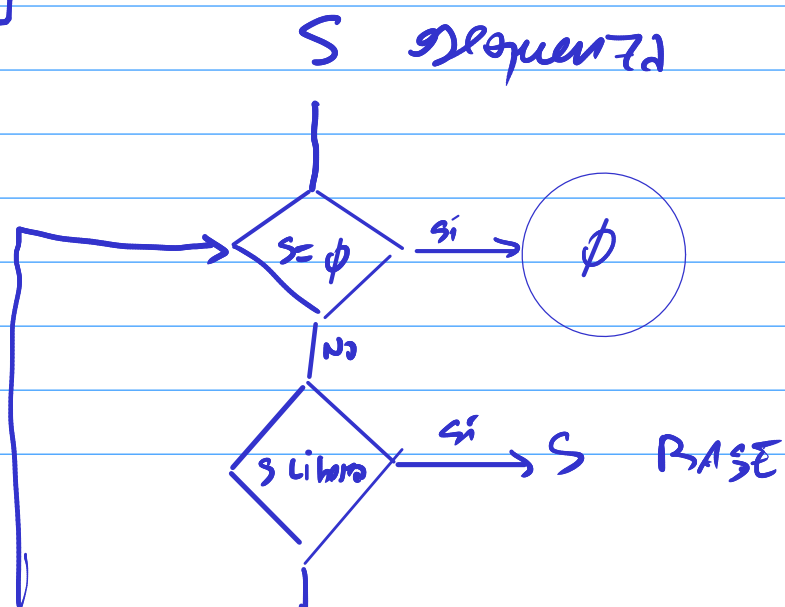
Viceversa: se $\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j$

$$\Rightarrow \bar{v}_i - \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j = 0 \text{ e i'}$$

coeff. di v_i è $1 \neq 0 \Rightarrow$ la seq è legata $\square$

Teorema. Sia $S = (\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ una sequenza
legata $\Rightarrow \exists \bar{v}_i \in S$ tale che
 $L(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = L(S)$

[METODO DEGLI
SCARTI SUCCESSIVI]



$$\boxed{S \leftarrow S - \{ \bar{v}_i \}} \quad S \leftarrow S - \{ \bar{v}_i \}$$

COROLLARIO: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale
finitamente generato con $V(K) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow S$ ammette una base.

DIM (teorema). $\underline{0} = 2 \underline{0}$
 S legata $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

$$\exists \bar{v}_i \in S : \boxed{\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j} \quad \text{per il lemma precedente}$$

$$\begin{aligned} \bar{w} \in L(S) &\Rightarrow \bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n = \\ &= \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \beta_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j + \dots + \beta_n \bar{v}_n \in \\ &\in L(S \setminus \{ \bar{v}_i \}) \end{aligned}$$

$$L(S) \subseteq L(S \setminus \{ \bar{v}_i \})$$

$$\text{Viceversa se } \bar{w} \in L(S \setminus \{ \bar{v}_i \}) \Rightarrow \bar{w} = \sum_{j \neq i} \gamma_j \bar{v}_j =$$

$$= \sum_{j \neq i} \gamma_j \bar{v}_j + 0 \cdot \bar{v}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{w} \in L(S)$$

□

Legame fra sequenze libere e sequenze di generatori

$$S = \left((1\ 0\ 0), \cancel{(0\ 1\ 0)}, (0\ 0\ 1), (0\ 1\ 1) \right)$$

$$(0\ 1\ 0) = -(0\ 0\ 1) + (0\ 1\ 1)$$

$$(0\ 1\ 1) = (0\ 0\ 1) + (0\ 1\ 0)$$

Lemma di Steinitz: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale finitamente generato e siano

$A =$ sequenza libera di vettori di $V(K)$
 $(\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_m)$

$B =$ sequenza di generatori di $V(K)$
 $(\bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_n)$

$$\Rightarrow m \leq n$$

DIM:

Supponiamo per assurdo $m > n$

$$\begin{array}{c} (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n \ \bar{a}_{n+1} \ \dots \ \bar{a}_m) \\ (\bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_n) \end{array}$$

poiché B di generatori $\bar{a}_1 \in \langle B \rangle$

$$\bar{a}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{b}_i \quad \text{in particolare}$$

poiché A è libera $\Rightarrow \bar{a}_1 \neq 0 \Rightarrow \exists i$ tale
 che $\alpha_i \neq 0$ supponiamo WLOG $i=1$

$$\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$\boxed{\bar{b}_1 = \alpha_1^{-1} (\bar{a}_1 - \alpha_1 \bar{b}_2 - \dots - \alpha_n \bar{b}_n)} \quad (*)$$

$$B_1 = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

oss : $\mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B)$ perché ogni vettore in $\mathcal{L}(B)$ in cui compare b_1 si può rivedere sostituendo a b_1 (*) e dunque è nella copertura lineare di B_1 . In particolare B_1 è di generatori

$$\begin{array}{c} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \alpha_m) \\ B = (b_1 b_2 \dots b_n) \\ \downarrow \\ B_1 = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) \end{array}$$

oss $\bar{a}_2$ NON È UNA C.C.I.N.E.A.R.E (min/riglo) $\perp \bar{a}_1$ perché $\bar{a}_1$ è libera.

$$\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B_1) \quad \bar{a}_2 = \beta_1 \bar{a}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$$

e almeno uno dei β_i con $i \geq 2$ è $\neq 0$
 supponiamo sia β_2

$$\bar{b}_2 = (\bar{a}_2 - \beta_1 \bar{a}_1 - \dots - \beta_n \bar{b}_n) \beta_2^{-1}$$

$$B_2 = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$$

Dopo n passaggi

$$A = (\bar{a}_1 \quad \dots \quad \bar{a}_n \quad a_{n+1} \quad \dots \quad a_m)$$

$$B_n = (\bar{a}_1 \quad \dots \quad \bar{a}_n)$$

MA B_n è di generatori $\Rightarrow \bar{a}_{n+1} \in L(B_n)$

$\Rightarrow \bar{a}_{n+1}$ è combinazione lineare dei vettori

$\bar{a}_1 \quad \dots \quad \bar{a}_n$ che stanno in $A \Rightarrow A$ è legata

ASSURDO $\Rightarrow m \leq n$

□

Corollario 1] Siano B e B' due basi di $V(K)$ con $V(K)$ finitamente generato.

$$\text{ALLORA } |B| = |B'|$$

Dim: B base $\rightarrow$ seq. libera di generatori

B' " $\rightarrow$ " " " "

$|B| \leq |B'|$ perché B libera e B' di gen.

$|B'| \leq |B|$ perché B di gen. e B' libera.

$$\Rightarrow |B| = |B'|$$

□

Def: Si dice dimensione di uno spazio vett. $V(K) \rightarrow 0$ se $V(K) = \{0\}$ e non ha base

$|B|$ e B è una base di $V(K)$

$\mathbb{R}^4$

$((1000), (0100), (0010), (0001))$

$((1100), (0211), (0031), (0105))$

Notazione. Scriviamo $V_n(K)$ per indicare uno s.vettoriale di dimensione n su di un campo K .

Sistema di generatori $\xrightarrow{\text{scarticare.}} \begin{cases} \emptyset \\ \text{BASE} \end{cases}$

Sequenza libera $\xrightarrow[\text{vettori.}]{\text{aggiungendo}} \text{BASE}$

Teorema (di completamento della base)

In $V_n(K)$ sia A una sequenza libera di m vettori e B una base di n vettori.

Se $m=n \Rightarrow A$ è una base

Se $m < n \Rightarrow$ esistono in B $n-m$ vettori $\{b_1, \dots, b_{n-m}\} = B'$

Tali che $(A \cup B')$ è una base di $V_n(K)$.