

Esempi di spazi vettoriali

$(\mathbb{K}^2, +)$ con prodotto per scalare componente per componente.

$n \geq 1$ La stessa costruzione si può fare per $\mathbb{K}^n$

$$(\mathbb{K}^n, +) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n \quad \alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$$

Si verifichi con $+$ anche la somma di vettori e
con $\cdot$ il prodotto scalare/vettore.

Spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ su di un campo $\mathbb{K}$

Def: Una matrice $m \times n$ è una tabella di elementi di $\mathbb{K}$ avente m righe e n colonne.

$$m=n=2 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$$m=2, n=3 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Definiamo una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}^{m,n}$

= insieme delle matrici ad entrate in $\mathbb{K}$ con m righe e n colonne.

- Somma di 2 matrici $\rightarrow$ somma componente per componente

• Prodotto per scalare $\rightarrow$ prodotto componente per componente

$$n=m=2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$d \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{pmatrix}$$

$$K^4 = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in K \right\}$$

$$f: K^{2,2} \rightarrow K^4$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

f è lineare

$$M, N \in K^{2,2}, \alpha, \beta \in K.$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \boxed{f(\alpha M + \beta N)} = f \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha a_{11} + \beta b_{11}, \alpha a_{12} + \beta b_{12}, \alpha a_{21} + \beta b_{21}, \alpha a_{22} + \beta b_{22}) =$$

$$= \boxed{\alpha f(M) + \beta f(N)}$$

$$K^{2,2} \rightarrow K^4$$

una funzione che
gode di (*) e che

è lineare con inverso che

gode di (*) e detta isomorfismo
di spazi vettoriali

A, B ISOMORFI $\Leftrightarrow$ "A, B si comportano allo stesso modo"



Siano $V(K)$, $W(K)$ due spazi vettoriali su K e
 $f: V(K) \rightarrow W(K)$ una funzione tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V(K) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \boxed{f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w})}$$

Allora f è detta funzione lineare $V \rightarrow W$.

N.B.: l'insieme $\text{Hom}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ lineare}\}$
è uno spazio vettoriale su K .

$\text{Hom} \rightarrow \text{homomorphism}$

Rispetto che operazioni? $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \quad \forall \alpha \in K$$

Esempio: K è spazio vettoriale su se stesso

$$\alpha + \beta \in K \quad \alpha + \beta = \alpha + \beta \quad \alpha \cdot \beta = \alpha \beta$$

Spazio vettoriale

$\swarrow$ n -uple
 $\swarrow$ matrici $m \times n$
 $\swarrow$ vettori "freccie" nel piano

Negli spazi vettoriali vale una forma di "legge di
associazione per il prodotto per scalare"

Teorema: sia $V(K)$ uno spazio vettoriale
sul campo K e sia 0 (vettore nullo)
l'elemento neutro della somma in $(V, +)$

[es. in $\mathbb{K}^2$ $\underline{0} = (0, 0)$]

allora $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ abbiamo

$$\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ oppure } \bar{v} = \underline{0}$$

DIM:

Consideriamo $0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$

$\Rightarrow$ sommando a dx e rx $(-0 \cdot \bar{v})$ si ha

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (-0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = \underbrace{(-0 \cdot \bar{v}) + 0 \cdot \bar{v}}_{\underline{0}} + 0 \cdot \bar{v} = \\ &= 0 \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

viceversa Supponiamo $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ con $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha \cdot \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} =$$

$$= 1 \cdot \bar{v} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} \Rightarrow \bar{v} = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$$

D'altra parte $\forall \beta \in \mathbb{K}, \beta \cdot \underline{0} =$

$$= \beta \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = \beta \cdot \underline{0} + \beta \cdot \underline{0}$$

e quindi come prima

$$\beta \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

ponendo $\beta = \alpha^{-1}$ $\alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$

□

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale

$$\bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K}), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Il vettore $\alpha \cdot \bar{v} + \beta \cdot \bar{w}$ è detto combinazione lineare (con α e β) dei vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$

Es. In $\mathbb{R}^2$ $(\bar{v}, \bar{w}) = (1, 3), (5, 7)$ $\alpha=1$ $\beta=2$

$$1(1, 3) + 2(5, 7) = (1, 3) + (10, 14) = (11, 17)$$

N.B.: le combinazioni lineari servono a costruire "nuovi" vettori a partire da quelli di partenza.

[N.B. 2] f lineare $\Leftrightarrow f$ manda combin. lineari in combin. lineari.
 $f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w})$

Def. Siano $V(K)$ uno s. vettoriale su K e

$S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n, \dots)$ una sequenza di vettori di $V(K)$
insieme
sistema

si dice copertura lineare di S e la si indica con

$\mathcal{L}(S)$ oppure $\langle S \rangle$

l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di vettori di S .

Esempio $S = ((1, 0), (0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{L}(S) = \{ \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$$

$$S = ((1, 1), (0, -1))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) &= \{ \alpha(1, 1) + \beta(0, -1) = (\alpha, \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ (\alpha, \gamma) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \gamma = \alpha - \beta, \beta \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ (\alpha, \gamma) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$S = ((1, 0), (2, 0))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) &= \{ (\alpha + 2\beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \{ (\gamma, 0) \mid \gamma = \alpha + 2\beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (\gamma, 0) \mid \gamma \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ &\quad \neq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Def: Si dice che S è una

sequenza sistematica insieme

 di generatori
per $V(k)$ se $\mathcal{L}(S) = V$ □

$S_1 = ((1, 0), (0, 1))$ è seq. di gen. per $\mathbb{R}^2$

$S_2 = ((1, 0), (0, 1), (2, 3))$ " " " " $\mathbb{R}^2$

$S_3 = ((1, 0), (2, 0))$ non è seq. di generatori per $\mathbb{R}^2$

Sottospazio vettoriale $W \subseteq V(K)$

Idea 1) $W \subseteq V$

2) W è uno sp. vettoriale su K

(rispetto due operazioni?)

Si dice che $W \subseteq V(K)$ è un sottospazio vettoriale di $V(K)$ se W è il sottinsieme di $V(K)$

1) è spazio vettoriale rispetto
le restrizioni troncate delle operazioni
di $V(K)$

le operazioni di W sono
le stesse di $V(K)$ ma
applicate solamente sui gli
elementi di W

-
- 1) presi 2 vettori di W la loro somma (con la somma di V) deve essere un vettore di W
(in particolare $(W, +|_{W \times W}^W)$ deve essere un gruppo abeliano).
 - 2) il prodotto di uno scalare $\alpha \in K$ per un elemento di W deve essere un elemento di W

Lemma: Sia $-1 \in K$ l'elemento tale che $(-1)+1=0$ e in $V(K)$ uno spazio vettoriale su K .

Allora $\forall \bar{v} \in V(K) \quad (-1) \cdot \bar{v} = (-\bar{v})$

cioè moltiplicare per -1 corrisponde a prendere il vettore opposto a $\bar{v}$

DIM:
$$(-1) \cdot \bar{v} + \bar{v} = (-1) \cdot \bar{v} + (1) \cdot \bar{v} = (-1+1) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow (-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v} \quad \square$$

Come fare a riconoscere un sottospazio vettoriale?

Teorema: $W \subseteq V(K)$ è sottospazio $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \bar{u}, \bar{v} \in W, \forall \alpha, \beta \in K \quad \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W}$$

$\rightarrow$ cioè "W è chiuso rispetto le combinazioni lineari"

DIM: Rammentiamo che gli assiomi di s.vettoriale valgono $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ quindi le proprietà 1) -- 4) valgono anche se ci restringiamo a W.

$\rightarrow$ Quello che non è garantito è che il risultato delle operazioni stia in W

$$X = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$(1,0) + (0,1) \notin X$$

$$(1,1)$$

Dobbiamo mostrare i) che

$(W, +|_{W,W})$ è un gruppo facendo vedere che la somma di due suoi elementi è in W, $0 \in W$ e che per ogni $\bar{u} \in W, -\bar{u} \in W$

$$2) \forall \alpha \in K, \forall \bar{u} \in W, \alpha \cdot \bar{u} \in W$$

$$(\Leftarrow) \text{ supponiamo che } \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{u}, \bar{v} \in W, \\ \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W$$

In particolare se $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow 0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = 0 \in W$

se $\bar{u} \in W, \alpha = -1, \beta = 0 \Rightarrow -1 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} \in W$

se $\alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow \text{~~per~~ } 1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in W$

$(W|_{W \times W})$ è gruppo

Inoltre se $\beta = 0, \alpha \in K$ vedo che

$$\alpha \cdot \bar{u} = \alpha \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{w} \in W \Rightarrow$$

anche rispetto la restr. troncata del prodotto per scalare rimane o posto

$(\Rightarrow)$ Supponiamo W spazio vettoriale

$$\Rightarrow \forall \bar{u}, \bar{v} \in W \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

$\alpha \bar{u}, \beta \bar{v} \in W$ perché valg. le prop. per il prodotto per scalare

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W$$

□

Esempio 1

$$W \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$W = \{ (1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

W è sott. vettoriale? No $(0,0) \notin W$
(non ci sta 0)

oppure associare

$$(1, \alpha) + (1, \beta) = (2, \alpha + \beta) \notin W$$

Esempio 1. $W = \{ (x, y) \mid x^2 = y^2 \}$ $(0,0) \in W$

$$(1, 1) \in W \rightarrow \alpha(1, 1) \in W$$

$$(1, -1) \in W, (1, 1) \in W$$

$$(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin W$$

W non è sott. vettoriale

$$\alpha(x_0, y_0) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_0 + \beta x_1, \alpha y_0 + \beta y_1)$$

$$x_0^2 = y_0^2 \quad x_1^2 = y_1^2$$

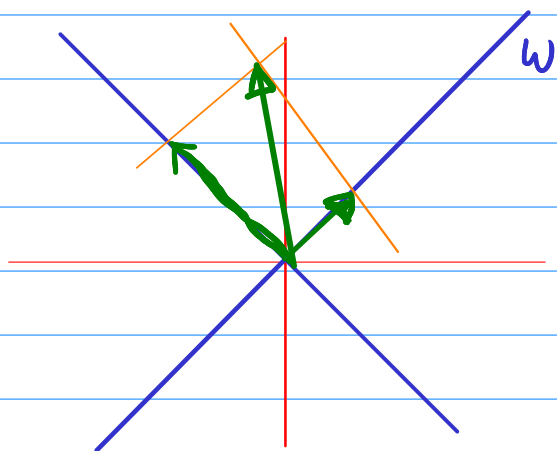
$$\alpha^2 x_0^2 + \beta^2 x_1^2 + 2\alpha\beta x_0 x_1 =$$

$$= \alpha^2 y_0^2 + \beta^2 y_1^2 + 2\alpha\beta x_0 x_1$$

perché in generale

$$y_0 y_1 \neq x_0 x_1$$

$$(x+y)(x-y) = 0$$



$$W = \{ (x, y) \mid x + y = 0 \} \quad (0,0) \in W$$

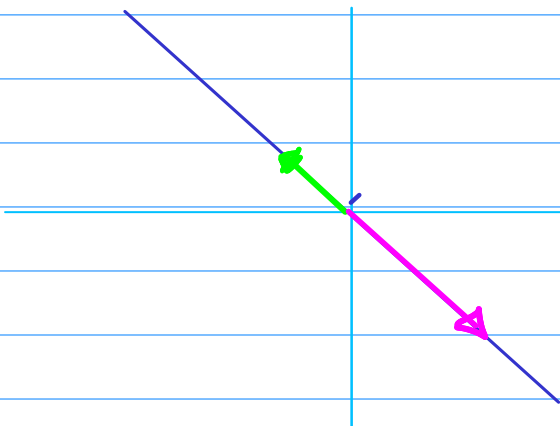
$$\begin{matrix} \bar{u} & \bar{v} \\ (x_0, y_0) & | & (x_1, y_1) \in W \end{matrix}$$

$$x_0 = -y_0 \quad x_1 = -y_1$$

$$\begin{aligned} \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} &= \alpha (x_0, y_0) + \beta (x_1, y_1) = \\ &= \alpha (-y_0, y_0) + \beta (-y_1, y_1) = \\ &= \left(\underbrace{-\alpha y_0 - \beta y_1}_{x_2}, \underbrace{\alpha y_0 + \beta y_1}_{y_2} \right) = \end{aligned}$$

$$= (-y_2, y_2) = (x_2, y_2) \text{ con } x_2 + y_2 = 0 \in W$$

$\Rightarrow W$ è sottospazio vettoriale



$$W_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$$

OSS: Sia K^n visto come spazio vettoriale su K e consideriamo l'insieme

$$W = \{ (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0 \}$$

per dei coeff. $\alpha_i \in K$ fissati.

ES:

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z + 4t = 0 \}$$

Insieme delle n -uple che soddisfanno una equazione lineare (1° grado su tutti i termini) omogenea (con termine costante $= 0$).

$\Rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

DIM: Siano $\bar{u} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{w} = (b_1, \dots, b_n) \in W$

$$\sum a_i a_i = 0 \quad \sum a_i b_i = 0$$

consideriamo $\beta \bar{u} + \gamma \bar{w} =$

$$(\beta a_1 + \gamma b_1, \dots, \beta a_n + \gamma b_n)$$

$$\sum_i a_i (\beta a_i + \gamma b_i) =$$

$$\sum_i a_i \beta a_i + \sum_i a_i \gamma b_i =$$

$$= \beta \sum a_i a_i + \gamma \sum a_i b_i =$$

$$\beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0 \quad \square$$

$$\Rightarrow \beta \bar{u} + \gamma \bar{w} \in W$$

oss: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale

$S \subseteq V(\mathbb{K})$ una sequenza di vettori

$\Rightarrow L(S)$ è un sottospazio vettoriale
 $\hookrightarrow V(\mathbb{K})$.

Se $\mathcal{L}(S) = V \Rightarrow S$ sequenza di generatori per $V(K)$.

Dim: Sia $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \in S$

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \in K$$

$$\beta_1 \dots \beta_n \in K$$

tali che

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$$

$$\bar{b} = \beta_1 \bar{a}_1 + \dots + \beta_n \bar{a}_n$$

$$\Rightarrow \forall \gamma, \delta \in K$$

$$\begin{aligned} \gamma \bar{a} + \delta \bar{b} &= \gamma(\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) + \\ &\quad \delta(\beta_1 \bar{a}_1 + \dots + \beta_n \bar{a}_n) = \\ &= (\gamma \alpha_1 + \delta \beta_1) \bar{a}_1 + \dots + (\gamma \alpha_n + \delta \beta_n) \bar{a}_n \in \\ &\quad \mathcal{L}(S). \end{aligned}$$

□

DATI VETTORI in $V(K) \rightarrow$ costruiamo lo spazio

$\mathbb{R}^{2,2}$

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma & \beta + \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

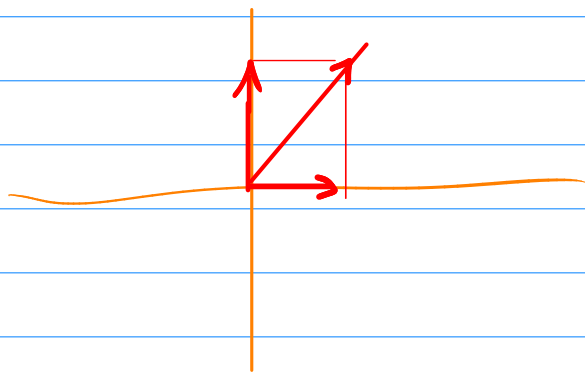
oss 2) Siano $U, W \subseteq V(IK)$. Allora $U \cap W \subseteq V(IK)$

↑
spazi
vettoriali

In generale $U \cup W$ non è uno spazio

$$U = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \quad W = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$(x, 0) + (0, y) \notin U \cup W \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$



Siano $U, W \subseteq V(IK)$.

prendiamo $\bar{u}, \bar{w} \in U \cap W$ $\alpha, \beta \in IK$.

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in U \quad \text{perché } U \subseteq V(IK) \\ \bar{u} \in U, \bar{w} \in U$$

$$\alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in W \quad \text{perché } W \subseteq V(IK) \\ \bar{u}, \bar{w} \in W$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in U \cap W \quad \square$$

Si è visto che l'insieme delle soluzioni
di 1 equazione lineare omogenea

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$
 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$

Se di equazioni ne abbiamo più di una

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni di ognuna sarà
 un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ l'insieme di
 tutte le soluzioni contemporanee di (*) sarà
 l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di
 ognuna di loro e quindi anche esso
 un sottospazio vettoriale.

$$\mathbb{R}^3 := \{ (x, y, z) \mid \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \} =$$

$$= \{ (x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\{ (x, y, z) \mid x+y=0 \} \cap \{ (x, y, z) \mid x-z=0 \}$$

Oss: Se consideriamo i generatori per uno
 spazio vettoriale (o cop. lineare)
 $\rightarrow$ più generatori abbiamo "più è grande il"

"spazio generabile".

Se consideriamo le equazioni:

più ce ne sono "più in generale"
lo spazio descritto è "più grande".

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x=y, 2x=2y, 3x=3y\}.$$

$$\{(x, y, z) : x=y, z=2x\} \subsetneq \{(x, y, z) : x=y\}.$$

→