UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo Appello - 16/1/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice A_k,

$$\begin{pmatrix} -2 & 2k+10 & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 2k+10 & -2 \end{pmatrix}$$

- Si stabilisca, se esistono, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = -5$ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, il vettore $v = (1, -1, 1)$ è autovettore di A e il relativo autovalore.

  Risposta $k = -3$, autovalore: -3 **(pt.3)**

- Si determini, se esiste l'autospazio cui v appartiene.

  Risposta $V_{-3} = \{(h, -h, h) : h \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini la distantanza fra le rette

$$r : \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Risposta $d = \frac{1}{6}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$, si considerino i tre piani

$$\alpha : kx + (k-4)y = k - 4, \quad \beta : 2x + (k-4)y + z = k - 4, \quad \gamma : kx + y = 1.$$

- Per i valori di k (se esistono) per i quali tali piani formano una stella si determinino le coordinate del centro.

  Risposta $k \neq 0, 5$: stella; centro $C = (0, 1, 0)$ **(pt.4)**

- Per i valori di k (se esistono) per i quali tali piani formano un fascio si determini l'equazione cartesiana della retta sostegno di tale fascio.

  Risposta $k = 5$: fascio di asse $5x + y = 1 = 2x + y + z$; $k = 0$: fascio di asse $y - 1 = 0 = 2x + z$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la quadrica che si ottiene ruotando la retta r intorno alla retta s ove r ed s sono date da

$$r : \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 4x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} 4x - z - 8 = 0 \\ 4y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad .$$

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi e si dica di quale natura sono i punti semplici della quadrica.

  Risposta Cilindro ellittico di vertice $V_\infty = [(-1, 1, -4, 0)]$ **(pt.4)**

- Si determinino le possibili sezioni piane irriducibili della quadrica in oggetto.

  Risposta Ellissi **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati da $U_k := \mathcal{L}((1, 0, k, 0), (1, k, 0, k))$, $W_k := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon kx + z = 0, y = 0\}$. Si determinino al variare di k le dimensioni di $U_k \cap W_k$ e $U_k + W_k$.
Risposta Se $k = 0$: $\dim(U_k) = 1, \dim(W_k) = 2, \dim(U + W) = 2, \dim(U_k \cap W_k) = 1$; se $k \neq 0$: $\dim(U) = 2, \dim(W_k) = 2, \dim(U_k \cap W_k) = 0, \dim(U_k + W_k) = 4$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo Appello - 16/1/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice A_k,

$$\begin{pmatrix} -2 & k+10 & 3 \\ 0 & k/2 & 0 \\ 3 & k+10 & -2 \end{pmatrix}$$

- Si stabilisca, se esistono, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = -10$ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, il vettore $v = (-1, 1, -1)$ è autovettore di A e il relativo autovalore.

  Risposta $k = -6$, autovalore: -3 **(pt.3)**

- Si determini, se esiste l'autospazio cui v appartiene.

  Risposta $V_{-3} = \{(h, -h, h) : h \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini la distantanza fra le rette

$$r : \begin{cases} 2z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Risposta $d = \frac{1}{6}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$, si considerino i tre piani

$$\alpha : (k-4)x + ky = k - 4, \quad \beta : (k-4)x + 2y + z = k - 4, \quad \gamma : x + ky = 1.$$

- Per i valori di k (se esistono) per i quali tali piani formano una stella si determinino le coordinate del centro.

  Risposta $k \neq 0, 5$: stella; centro $C = (1, 0, 0)$ **(pt.4)**

- Per i valori di k (se esistono) per i quali tali piani formano un fascio si determini l'equazione cartesiana della retta sostegno di tale fascio.

  Risposta $k = 5$: fascio di asse $5y + x = 1 = 2y + x + z$; $k = 0$: fascio di asse $x - 1 = 0 = 2y + z$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la quadrica che si ottiene ruotando la retta r intorno alla retta s ove r ed s sono date da

$$r : \begin{cases} y + z - 5 = 0 \\ x - 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - 4z + 8 = 0 \\ x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \quad .$$

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi e si dica di quale natura sono i punti semplici della quadrica.

  Risposta Cilindro ellittico di vertice $V_\infty = [(-4, 1, -1, 0)]$ **(pt.4)**

- Si determinino le possibili sezioni piane irriducibili della quadrica in oggetto.

  Risposta Ellissi **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati da $U_k := \mathcal{L}((1, 0, 0, k), (1, k, k, 0))$, $W_k := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : kx + t = 0, y = 0\}$. Si determinino al variare di k le dimensioni di $U_k \cap W_k$ e $U_k + W_k$.

Risposta Se $k = 0$: $\dim(U_k) = 1, \dim(W_k) = 2, \dim(U + W) = 2, \dim(U_k \cap W_k) = 1$; se $k \neq 0$: $\dim(U) = 2, \dim(W_k) = 2, \dim(U_k \cap W_k) = 0, \dim(U_k + W_k) = 4$ **(pt.4)**