UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{C}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{C}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 0, 2$; $k = 0, 2$ soluz. unica **(pt.5)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{C}$ per cui $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**

- posto ora $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_2 = \{(-1, 2, 2/3)\}$ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$ in $\mathbb{C}^3$.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v_1} = (1, 2, 1, -1)$, $\vec{v_2} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v_3} = (0, 5, -7, 10)$, $\vec{v_4} = (0, 2, 0, -1)$ che danno il vettore $(2, 2, 2, -1)$.

Risposta $-t\vec{v_1} + (2 + t)\vec{v_2} + 0\vec{v_3} + (1 + t)\vec{v_4}$, $t \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\alpha + \beta, \beta - \gamma, 2\alpha + 2\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((2k, -1, 1), (0, 0, k), (2, 1, k + 1))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 9 & k & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$, dove $k \in \mathbb{C}$. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.3)**

- posto $k = 6$, una matrice D diagonale simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_6 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 4 e 6 di $\mathbb{R}^{5,2}$.

- Si determinino le possibili dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

  Risposta $6 \leq \dim U + W \leq 10$, $0 \leq \dim U \cap W \leq 4$ **(pt.2)**

- Se possibile, si scrivano U e W tali che la somma $U \oplus W$ sia diretta e sottospazio proprio di $\mathbb{R}^{5,2}$.

  Risposta Non è possibile, in quanto se $U \oplus W$, allora $U \oplus W = \mathbb{R}^{5,2}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k+2 \\ 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{Q}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{Q}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -1, 1$; $k = -1, 1$ soluz. unica **(pt.5)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per cui $(0, 1, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**

- posto ora $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_1 = \{(2, -1, 2/3)\}$ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$ in $\mathbb{Q}^3$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v_1} = (1, 2, 0, 4)$, $\vec{v_2} = (0, -3, 4, 0)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v_4} = (1, 1, 0, 2)$ che danno il vettore (1,-3,4,0).
Risposta $t\vec{v_1} + \vec{v_2} + (t + 1)\vec{v_3} - 2t\vec{v_4}$, $t \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\alpha + \beta, 2\alpha + 2\gamma, \beta - \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((2k + 4, 1, -1), (0, k + 2, 0), (2, k + 3, 1))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 25 & k & 0 \\ 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$, dove $k \in \mathbb{C}$. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 5$ **(pt.3)**

- posto $k = 15$, una matrice D diagonale simile ad A_{15} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_{15} risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 8 e 9 di $\mathbb{R}^{5,3}$.

- Si determinino le possibili dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

  Risposta $9 \leq \dim U + W \leq 15$, $2 \leq \dim U \cap W \leq 8$ **(pt.2)**

- Se possibile, si scrivano U e W tali che la somma $U \oplus W$ sia diretta e sottospazio proprio di $\mathbb{R}^{5,3}$.

  Risposta Non è possibile, in quanto $\dim U + \dim W = 17 > 15$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ k+2 & 0 & 1 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -2, 0$; $k = -2, 0$ soluz. unica **(pt.5)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -2$ **(pt.1)**

- posto ora $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_0 = \{(-1, 2/3, 2)\}$ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$ in $\mathbb{R}^3$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0,1,0),(0,0,1)))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v_1} = (3, 0, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{v_3} = (0, 2, 0, 2)$, $\vec{v_4} = (3, 6, 1, 6)$ che danno il vettore $(3, 2, 1, 2)$.
Risposta $(1+t)\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + (3+t)\vec{v_3} - \vec{v_4}$, $t \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(-\alpha - \beta, \beta - \gamma, 2\alpha + 2\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((k-2, -1, 1), (2-k, 0, k-2), (0, 1, k-1))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 8 & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$, dove $k \in \mathbb{C}$. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.3)**

- posto $k = 6$, una matrice D diagonale simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_6 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 4 e 7 di $\mathbb{R}^{11}$.

- Si determinino le possibili dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

  Risposta $7 \leq \dim U + W \leq 11$, $0 \leq \dim U \cap W \leq 4$ **(pt.2)**

- Se possibile, si scrivano U e W tali che la somma $U \oplus W$ sia diretta e sottospazio proprio di $\mathbb{R}^{11}$.

  Risposta Non è possibile in quanto $U \oplus W = \mathbb{R}^{11}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{C}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{C}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 1, 3$; $k = 1, 3$ soluz. unica **(pt.5)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{C}$ per cui $(0, 0, 1)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 1$ **(pt.1)**

- posto ora $k = 3$ si determini l'insieme S_3 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_3 = \{(2/3, 2, -1)\}$ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_3)$ in $\mathbb{C}^3$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v_1} = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{v_3} = (0, 0, 2, -2)$, $\vec{v_4} = (4, -3, -2, 1)$ che danno il vettore $(-2, 2, 2, -2)$.
Risposta $t\vec{v_1} + 2\vec{v_2} + \vec{v_3} - 3t\vec{v_4}$, $t \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\beta - \gamma, 2\alpha + 2\gamma, -\alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((-1, 1, k-4), (0, k-4, 4-k), (1, k-3, 0))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 4 & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$, dove $k \in \mathbb{C}$. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.3)**

- posto $k = 4$, una matrice D diagonale simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_4 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Siano U e W due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 12 e 8 di $\mathbb{Q}^{4,4}$.

- Si determinino le possibili dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

  Risposta $12 \leq \dim U + W \leq 16$, $4 \leq \dim U \cap W \leq 8$ **(pt.2)**

- Se possibile, si scrivano U e W tali che la somma $U \oplus W$ sia diretta e sottospazio proprio di $\mathbb{Q}^{4,4}$.

  Risposta Non è possibile perché $\dim U \cap W > 0$ sempre **(pt.2)**