UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o Appello - 15/01/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-3 \\ 0 & k+3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \\ -3-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq -4$; $k \neq -4, 1$: soluzione unica; $k = 1$: ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β e γ rappresentati rispettivamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro k.
  Risposta $k \neq -4, 1$: stella propria di piani; $k = 1$: fascio proprio di piani; $k = -4$: stella impropria di piani **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$.
  Risposta $S_0 = \{(-23/4, 1/4, 5/4)\}$ **(pt.2)**
- Si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$.
  Risposta $\{(a, b, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ si dice se il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio cui esso appartiene.

Risposta $\lambda = 2$, $V_2 = \{(h, -k, 4k, k) \in \mathbb{R}^4\colon h, k \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x + y - 4iz + 5 = 0$.

Risposta $B = ((2i, 0, 1), (1, -2, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iy - 1 = 0 = x + (i + 1)z - 3$. Si dica, giustificando la risposta, se essa ammette un punto reale.

Risposta No, in quanto immaginaria di II specie **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Siano date la conica $\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ e la retta $s : y = 2$. Al variare di un punto P su s sia R il punto comune al diametro di $\mathcal{C}$ passante per P ed alla polare di P rispetto si $\mathcal{C}$. Si determini il luogo geometrico descritto da R al variare di P.

Risposta $x^2 - y^2 - 2x + y + 1 = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ siano assegnate le rette $r : x - 2y + 6 = 0 = z$ ed $s : x + z = 0 = y - 3$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta mediante la rotazione della retta r attorno ad s.

  Risposta $x^2 - 4y^2 + z^2 - 10xz + 24y - 36 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono di vertice $V = (0, 3, 0)$; punti parabolici **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o Appello - 15/01/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-4 \\ 0 & k+4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 2 \\ -5-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq -5$; $k \neq -5, 0$: soluzione unica; $k = 0$: ∞^1 soluzioni ____ **(pt.4)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β e γ rappresentati rispettivamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro k.
  Risposta $k \neq -5, 0$: stella propria di piani; $k = 0$: fascio proprio di piani; $k = -5$: stella impropria di piani ____ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$.
  Risposta $S_2 = \{(-83/7, 1/7, 8/7)\}$ ____ **(pt.2)**
- Si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$.
  Risposta $\{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si dice se il vettore $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio cui esso appartiene.

Risposta $\lambda = 3$, $V_3 = \{(-3h, k, h, 0) \in \mathbb{R}^4 : h, k \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x + 4y - iz + 7 = 0$.

Risposta $B = ((2, -1, 0), (0, i, 4))$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : ix - 1 = 0 = y + (i+1)z - 3$. Si dica, giustificando la risposta, se essa ammette un punto reale.

Risposta No, in quanto immaginaria di II specie ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Siano date la conica $\mathcal{C} : y^2 - x^2 - 2y + 2x - 1 = 0$ e la retta $s : x = 4$. Al variare di un punto P su s sia R il punto comune al diametro di $\mathcal{C}$ passante per P ed alla polare di P rispetto si $\mathcal{C}$. Si determini il luogo geometrico descritto da R al variare di P.

Risposta $3y^2 - 3x^2 - 6y + 5x - 1 = 0$ ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ siano assegnate le rette $r : x - 2y + 2 = 0 = z$ ed $s : 2x - z = 0 = y - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta mediante la rotazione della retta r attorno ad s.

  Risposta $x^2 - 4y^2 + 20xz + 16z^2 + 8y - 4 = 0$ ____ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono di vertice $V = (0, 1, 0)$; punti parabolici ____ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o Appello - 15/01/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-2 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ -1-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq -3$; $k \neq -3, 2$: soluzione unica; $k = 2$: ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β e γ rappresentati rispettivamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro k.
  Risposta $k \neq -3, 2$: stella propria di piani; $k = 2$: fascio proprio di piani; $k = -3$: stella impropria di piani **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1 X = B_1$.
  Risposta $S_2 = \{(-23/4, 1/4, 5/4)\}$ **(pt.2)**
- Si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.
  Risposta $\{(0, a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ si dice se il vettore $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio cui esso appartiene.

Risposta $\lambda = -1$, $V_{-1} = \{(-2h, 0, h, k) \in \mathbb{R}^4 \colon h, k \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 6x + 2y - 2iz + 2i = 0$.

Risposta $B = ((1, -3, 0), (0, i, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iz - 1 = 0 = x + (i+1)y - 3$. Si dica, giustificando la risposta, se essa ammette un punto reale.

Risposta No, in quanto immaginaria di II specie **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Siano date la conica $\mathcal{C} : y^2 - x^2 - 2y + 2x - 1 = 0$ e la retta $s : x = 2$. Al variare di un punto P su s sia R il punto comune al diametro di $\mathcal{C}$ passante per P ed alla polare di P rispetto si $\mathcal{C}$. Si determini il luogo geometrico descritto da R al variare di P.

Risposta $y^2 - x^2 - 2y + x + 1 = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ siano assegnate le rette $r : 2x - y - 2 = 0 = z$ ed $s : 2y - z = 0 = x - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta mediante la rotazione della retta r attorno ad s.

  Risposta $4x^2 - y^2 - 20yz - 16z^2 - 8x + 4 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono di vertice $V = (1, 0, 0)$; punti parabolici **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o Appello - 15/01/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4-k \\ 0 & k-4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k-5 \\ 2 \\ 11-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k \neq 3, 8$: soluzione unica; $k = 8$: ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β e γ rappresentati rispettivamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro k.
  Risposta $k \neq -3, 2$: stella propria di piani; $k = 8$: fascio proprio di piani; $k = 3$: stella impropria di piani **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1 X = B_1$.
  Risposta $S_1 = \{(11/2, -1/2, 1/2)\}$ **(pt.2)**
- Si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.
  Risposta $\{(0, a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si dice se il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio cui esso appartiene.

Risposta $\lambda = -2$, $V_{-2} = \{(0, 3h, k, h) \in \mathbb{R}^4 \colon h, k \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : ix + 3y - 2z + 15 = 0$.

Risposta $B = ((3, -i, 0), (2, 0, i))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iz - 1 = 0 = y + (i+1)x - 3$. Si dica, giustificando la risposta, se essa ammette un punto reale.

Risposta No, in quanto immaginaria di II specie **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Siano date la conica $\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ e la retta $s : y = 4$. Al variare di un punto P su s sia R il punto comune al diametro di $\mathcal{C}$ passante per P ed alla polare di P rispetto si $\mathcal{C}$. Si determini il luogo geometrico descritto da R al variare di P.

Risposta $3x^2 - 3y^2 - 6x + 5y - 1 = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ siano assegnate le rette $r : x - 2z + 2 = 0 = y$ ed $s : 2x - y = 0 = z - 1$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta mediante la rotazione della retta r attorno ad s.

  Risposta $x^2 + 20xy + 16y^2 - 4z^2 + 8z - 4 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono di vertice $V = (0, 0, 1)$; punti parabolici **(pt.2)**