UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k+2 & k \\ 3 & k+4 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 6k-8 \\ 6(k-1) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$ ∞^1 soluzioni, $k = 2$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3A)**

- posto $k = 2$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_2)$ dove S_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_2 X = B_2$.

  Risposta $B = ((1,0,0), (-2,1,0), (-1,0,1))$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (k-2, k+1, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1, k+1, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, k, 1, 0))$.

Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (k-1, k+1, 1)$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 2$, $\lambda = 0$ ______ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((1,2,0), (0,1,1), (0,1,-1))$ ______ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1, 0, 2, k-2), (2, 0, 0, 0)\big)$ e $B_k = \big((0, 0, (k-2)^2, -2), (0, 1, 1, 1-k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x + 3y + (k-2)z + k - 2 = 0 = x + y - z - 1$ rappresentano una retta.

Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 - 3y^2 + 4xy + 2(k-1)x + 1 - k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 1$, $O = (0,0)$, $k = -4/3$, $D = (1, 2/3)$ ______ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-3/7, -2/7)$.

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (1, 0, 1)$, incidente con $r:\ x + 2y = 0 = z$ e ortogonale a $s:\ 2x - y - z = 0 = x + y - 2$.

Risposta $x + 2y - z = 0 = x - y + 3z - 4$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 2x^2 + 2(k-1)xy + 4xz + 2kz^2 - 2x - 2kz = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.

Risposta $k = 1$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2kx - 4(k+1)y + 2z - 2k = 0$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e il piano $\pi:\ x - 2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.

Risposta $k = -1/2$, $k = -9/8$ ______ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & k+3 & k+1 \\ 9 & k+5 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k+4 \\ 2k+7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ ∞^1 soluzioni, $k = 1$ ∞^2 soluzioni ____ **(pt.3A)**

- posto $k = 1$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_1)$ dove S_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_1 X = B_1$.

  Risposta $B = ((1, 0, -3), (0, 1, -2), (0, 0, 1))$ ____ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (-k-2, -k+1, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1, 1-k, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, -k, 1, 0))$.
Risposta $k = -2$ ____ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (k+5, 1, k-6)$, dove k è un parametro reale.

Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 3$, $\lambda = 2$ ____ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((2, 1, 0), (-2, 0, 1), (0, 1, -1))$ ____ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. ____ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1, 0, 2, k-4), (2, 0, 0, 0)\big)$ e $B_k = \big((0, 0, (k-4)^2, -2), (0, 1, 1, 3-k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta $k = 5$ ____ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x + 3y + kz + k = 0 = x + y - z - 1$ rappresentano una retta.
Risposta $k \neq -3$ ____ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 - 12y^2 + 8xy + 2(k+2)x - 2 - k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = -2$, $O = (0, 0)$, $k = -13/3$, $D = (1, 1/3)$ ____ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-3/7, -1/7)$.

  Risposta $k = -1$ ____ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (0, 1, 1)$, incidente con $r:\ 2x + y = 0 = z$ e ortogonale a $s:\ x - 2y + z = 0 = x + y - 2$.
Risposta $2x + y - z = 0 = x - y - 3z + 4$ ____ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 2x^2 + 2(k-2)xy + 4xz + 2(k-1)z^2 - 2x - 2(k-1)z = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.
Risposta $k = 2$ ____ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(k+1)x - 4(k+2)y + 2z - 2k - 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, e il piano $\pi:\ x - 2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.
Risposta $k = -3/2$, $k = -17/8$ ____ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k-1 & k+1 & 2 \\ k & k+3 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 6k-14 \\ 6(k-2) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 3$ ∞^1 soluzioni, $k = 3$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3A)**

- posto $k = 3$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_3)$ dove S_3 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_3X = B_3$.

  Risposta $B = ((0,0,1),(0,1,-2),(-1,0,1))$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (k-4, k-1, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1,k-1,0,1),(1,-1,1,0),(1,k-2,1,0))$.

Risposta $k = 4$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (k-4, 1, k-2)$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 5$, $\lambda = 0$ ______ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((1,0,2),(0,1,1),(0,1,-1))$ ______ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1,0,2,k-5),(2,0,0,0)\big)$ e $B_k = \big((0,0,(k-5)^2,-2),(0,1,1,4-k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $k = 6$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x+3y+(k-5)z+k-5 = 0 = x+y-z-1$ rappresentano una retta.

Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ x^2 - 12y^2 + 8xy + 4(k-3)x + 12 - 4k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 3$, $O = (0,0)$, $k = 2/3$, $D = (2, 2/3)$ ______ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-6/7, -2/7)$.

  Risposta $k = 4$ ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (1,1,0)$, incidente con $r:\ x+2z = 0 = y$ e ortogonale a $s:\ 2x-y-z = 0 = x+z-2$.

Risposta $x-y+2z = 0 = x+3y-z-4$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 2x^2 + 2kxy + 4xz + 2(k+1)z^2 - 2x - 2(k+1)z = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.

Risposta $k = 0$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k:\ x^2+y^2+z^2-2(k-2)x-4(k-1)y+2z-2k+4 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, e il piano $\pi:\ x-2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.

Risposta $k = 3/2$, $k = 7/8$ ______ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ k+4 & 6 & k+2 \\ k+6 & 9 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k+6 \\ 2k+9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni, $k = 0$ ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

- posto $k = 0$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_0)$ dove S_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_0X = B_0$.

  Risposta $B = ((0, 1, -3), (1, 0, -2), (0, 0, 1))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (k-1, k+2, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1, k+2, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, k+1, 1, 0))$.
Risposta $k = 1$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (k+4, k-7, 1)$, dove k è un parametro reale.

Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 4$, $\lambda = 2$ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((2, 0, 1), (-2, 1, 0), (0, 1, -1))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1, 0, 2, k-1), (2, 0, 0, 0)\big)$ e $B_k = \big((0, 0, (k-1)^2, -2), (0, 1, 1, -k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta $k = 2$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x + 3y + (k-3)z + k - 3 = 0 = x + y - z - 1$ rappresentano una retta.
Risposta $k \neq 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 3x^2 - y^2 - 4xy + 2(1/3 - k)y + k - 1/3 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 1/3$, $O = (0, 0)$, $k = -2$, $D = (2/3, 1)$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-2/7, -3/7)$.

  Risposta $k = 4/3$ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (-1, 0, 1)$, incidente con $r :\ x + 2y = 0 = z$ e ortogonale a $s :\ 2x - y - z = 0 = x + y - 2$.
Risposta $x + 2y + z = 0 = x - y + 3z - 2$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} :\ 2x^2 + 2(k+1)xy + 4xz + 2(k+2)z^2 - 2x - 2(k+2)z = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.
Risposta $k = -1$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(k+3)x - 4(k+4)y + 2z - 2k - 6 = 0$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, e il piano $\pi :\ x - 2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.
Risposta $k = -7/2$, $k = -33/8$ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & 2 & k-2 \\ k+2 & 3 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 6k-20 \\ 6(k-3) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 4$ ∞^1 soluzioni, $k = 4$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3A)**

- posto $k = 4$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_4)$ dove S_4 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_4X = B_4$.

  Risposta $B = ((0,1,0),(1,-2,0),(0,1,-1))$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (k, k+3, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1, k+3, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, k+2, 1, 0))$.
Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (1, k+2, k)$, dove k è un parametro reale.

Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 1$, $\lambda = 0$ ______ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((0,2,1),(1,1,0),(1,-1,0))$ ______ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1,0,2,k),(2,0,0,0)\big)$ e $B_k = \big((0,0,k^2,-2),(0,1,1,-1-k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x+3y+(k-1)z+k-1 = 0 = x+y-z-1$ rappresentano una retta.
Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k$: $12x^2 - y^2 - 8xy - 2(k+5/3)y + 5/3 + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = -5/3$, $O = (0,0)$, $k = -4$, $D = (1/3, 1)$ ______ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-1/7, -3/7)$.

  Risposta $k = -2/3$ ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (0,-1,1)$, incidente con $r :\ 2x + y = 0 = z$ e ortogonale a $s :\ x - 2y + z = 0 = x + y - 2$.
Risposta $2x + y + z = 0 = x - y - 3z + 2$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} :\ 2x^2 + 2(k-3)xy + 4xz + 2(k-2)z^2 - 2x - 2(k-2)z = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.
Risposta $k = 3$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(k-1)x - 4ky + 2z - 2k + 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e il piano $\pi :\ x - 2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.
Risposta $k = 1/2$, $k = -1/8$ ______ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° appello - 18/6/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k+3 & k+5 & 6 \\ k+4 & k+7 & 9 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k+8 \\ 2k+11 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq -1$ ∞^1 soluzioni, $k = -1$ ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

- posto $k = -1$ si determini una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$ dove S_{-1} è l'insieme delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$.

  Risposta $B = ((-3, 0, 1), (-2, 1, 0), (1, 0, 0))$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v_k} = (k-3, k, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((1, k, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, k-1, 1, 0))$.
Risposta $k = 3$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v_k} = (k-9, 1, k+2)$, dove k è un parametro reale.
Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v_k}$ è un autovettore di A e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 6$, $\lambda = 2$ **(pt.2A)**

- una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta $B = ((0, 1, 2), (1, 0, -2), (1, -1, 0))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A, in caso non sia possibile si giustifichi la risposta;

  Risposta Non esiste perché A è reale ma non simmetrica. **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$ dove $A_k = \big((1, 0, 2, -k-2), (2, 0, 0, 0)\big)$ e $B_k = \big((0, 0, (k+2)^2, -2), (0, 1, 1, 1+k)\big)$ e k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U_k rispetto al prodotto scalare euclideo.
Risposta $k = -3$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le equazioni $3x + 3y + (k-4)z + k - 4 = 0 = x + y - z - 1$ rappresentano una retta.
Risposta $k \neq 1$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 12x^2 - y^2 - 8xy + 4(10/3 - k)y + 4(k - 10/3) = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 10/3$, $O = (0, 0)$, $k = 1$, $D = (2/3, 2)$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ammette come centro il punto $C = (-2/7, -6/7)$.

  Risposta $k = 13/3$ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della retta passante per $P = (-1, 1, 0)$, incidente con $r:\ x + 2z = 0 = y$ e ortogonale a $s:\ 2x - y - z = 0 = x + z - 2$.
Risposta $x + y + 2z = 0 = x + 3y - z - 2$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 2x^2 + 2(k-4)xy + 4xz + 2(k-3)z^2 - 2x - 2(k-3)z = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{Q}_k$ si riduce in una coppia di piani paralleli.
Risposta $k = 4$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 9. In $A_3(\mathbb{R})$ si considerino le sfere $\Sigma_k:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2(k+2)x - 4(k+3)y + 2z - 2k - 4 = 0$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, e il piano $\pi:\ x - 2y = 0$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui Σ_k è tangente al piano π.
Risposta $k = -5/2$, $k = -25/8$ **(pt.3G)**