# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello 21/03/2016

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 4 & k & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di $k$, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette autosoluzioni;
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni. **(pt.2)**
- per ciascuno di tali valori, lo spazio $S_k$ delle soluzioni e la sua dimensione;
  **Risposta** se $k \neq -2$ $S_k = \mathcal{L}((2k, 1, -k, k-2))$, dim $S_k = 1$
  se $k = -2$ $S_{-2} = \mathcal{L}((-4, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1))$, dim $S_{-2} = 2$. **(pt.3)**
- i valori di $k$, se esistono, per i quali $(4, 1, -2, 0)$ è una soluzione del sistema.
  **Risposta** $k = 2$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- una base di $S_0$;
  **Risposta** $B = ((0, 1, 0, -2))$ **(pt.1)**
- un complemento diretto di $S_0$.
  **Risposta** $C = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 2.** In $\mathbb{E}_2(\mathbb{C})$, si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti all'asse x e che intercettano sull'asse y un segmento di lunghezza 4
**Risposta** $x^2 - y^2 = -4$ **(pt.4)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere $S$ tangenti al piano $\alpha : z = 0$ nel punto $A(1, 3, 0)$ e tangenti al piano $\beta : 2x - y - 2z + 3 = 0$
**Risposta** $S_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 4$ e $S_2 : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z - \frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ **(pt.4)**

**ESERCIZIO 4.** In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (k+1)x^2 + 2xy + 2kx - y^2 + 1 = 0$ dove $k$ è un parametro reale. Si determini per quali valori di $k$:

- $C(-3, -3)$ è il centro della conica;
  **Risposta** $k = -3$ **(pt.2)**
- la conica è un'iperbole equilatera;
  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2)**
- la conica ha due punti impropri immaginari e coniugati.
  **Risposta** $k < -2$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$

- si riconosca la quadrica $Q : x^2 - 2xz + 4x + 2y - 3z^2 + 2 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Paraboloide iperbolico **(pt.2)**
- si determini un piano reale che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.
  **Risposta** $x_4 = 0$ perchè il paraboloide è tangente al piano improprio, quindi $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile. **(pt.2)**
- si riconosca la sezione di $Q$ con il piano $\alpha : 2x + y + 1 = 0$, precisando, nel caso sia riducibile, le rette che la compongono.
  **Risposta** $x - 3z = 0 = 2x + y + 1$ e $x + z = 0 = 2x + y + 1$ **(pt.2)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello 21/03/2016

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di $k$, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B_k$ ammette autosoluzioni;
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni. **(pt.2)**
- per ciascuno di tali valori, lo spazio $S_k$ delle soluzioni e la sua dimensione;
  **Risposta** se $k \neq -1$ $S_k = \mathcal{L}((3, -6, 2(k^2 - k + 1), 6(k - 1)))$, dim $S_k = 1$
  se $k = -1$ $S_{-1} = \mathcal{L}((-\frac{3}{2}, -3, 1, 0), (-1, -1, 0, 1))$, dim $S_{-1} = 2$. **(pt.3)**
- i valori di $k$, se esistono, per i quali $(3, -6, 2, 0)$ è una soluzione del sistema.
  **Risposta** $k = 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- una base di $S_2$;
  **Risposta** $B = ((1, -2, 2, 2))$ **(pt.1)**
- un complemento diretto di $S_2$.
  **Risposta** $C = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 2.** In $\mathbb{E}_2(\mathbb{C})$, si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti all'asse x e che intercettano sull'asse y un segmento di lunghezza 6
**Risposta** $x^2 - y^2 = -9$ **(pt.4)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determinino le equazioni cartesiane delle sfere $S$ tangenti al piano $\alpha : y = 0$ nel punto $A(1, 0, -2)$ e tangenti al piano $\beta : 2x - 2y + z - 4 = 0$
**Risposta** $S_1 : (x - 1)^2 + (y + \frac{4}{5})^2 + (z + 2)^2 = \frac{16}{25}$ e $S_2 : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 16$ **(pt.4)**

**ESERCIZIO 4.** In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 - 2kxy - (k + 5)y^2 - 2y + 1 = 0$ dove $k$ è un parametro reale. Si determini per quali valori di $k$:

- $C(0, -\frac{1}{5})$ è il centro della conica;
  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2)**
- la conica è un'iperbole equilatera;
  **Risposta** $k = -4$ **(pt.2)**
- la conica ha due punti impropri immaginari e coniugati.
  **Risposta** $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$

- si riconosca la quadrica $Q : y^2 + 2x + 4y + z^2 - 5 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Paraboloide ellittico **(pt.2)**
- si determini un piano reale che sezioni la quadrica secondo una conica riducibile, motivando la risposta.
  **Risposta** $x_4 = 0$ perchè il paraboloide è tangente al piano improprio, quindi $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile. **(pt.2)**
- si riconosca la sezione di $Q$ con il piano $\alpha : x + 3y - 3 = 0$, precisando, nel caso sia riducibile, le rette che la compongono.
  **Risposta** $y - 1 + iz = 0 = x + 3y - 3$ ed $y - 1 - iz = 0 = x + 3y - 3$ **(pt.2)**