UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 3-k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -1$; $k \neq 3, -1$ ∞^1 soluzioni; $k = 3$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino:
  - l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$
    Risposta $S_0 = \{(x, 5, 2, -3) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_0)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_0) = \{(x, 5\lambda, 2\lambda, -3\lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid x, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1,0,0,0),(0,5,2,-3))$ ______ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_0)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_0)^\perp = \{(0, \frac{-2z+3t}{5}, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-2 & 2 \\ 0 & -k & 0 \\ 2 & k-2 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq 3, -1$, $\lambda_1 = -k$, $a_{-k} = 1$; $\lambda_2 = -3$, $a_{-3} = 1$; $\lambda_3 = 1$, $a_1 = 1$
  se $k = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $a_{-3} = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a_1 = 1$
  se $k = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $a_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $a_{-3} = 1$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta per k=2 la matrice è reale e simmetrica, quindi è ortodiagonalizzabile. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 4$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_1 = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_1) = 1$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^{2,3}(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 4 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 2, valore massimo 4 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 5 vettori e un sistema S' libero costituito da 5 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)). E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ è 4. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(x-1, x+y, y-2) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (2, 5, -1)$ ha componenti $(1, 0, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((2,5,-1),(1,0,0),(0,1,0)) ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2-k & 0 & 4 \\ k+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 2k+4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $\forall k$; $k \neq -2$ ∞^1 soluzioni; $k = -2$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino:
  - l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$
    Risposta $S_0 = \{(2, -2t-3, \frac{5t+11}{3}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_0)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_0) = \{(2\lambda, -2t-3\lambda, \frac{5t+11\lambda}{3}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((2, -3, \frac{11}{3}, 0), (0, -2, \frac{5}{3}, 1))$ ______ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_0)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_0)^\perp = \{(\frac{9y-11z}{6}, y, z, \frac{6y-5z}{3}) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & k+4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq 1, -4$, $\lambda_1 = k+2$, $a_{k+2} = 1$; $\lambda_2 = 3$, $a_3 = 1$; $\lambda_3 = -2$, $a_{-2} = 1$
  se $k = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $a_3 = 2$, $\lambda_3 = -2$, $a_{-2} = 1$
  se $k = -4$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -2$, $a_{-2} = 2$, $\lambda_2 = 3$, $a_3 = 1$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta per k=-4 la matrice è reale e simmetrica, quindi è ortodiagonalizzabile. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_3 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_3) = 2$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 4 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 3, valore massimo 4 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 5 vettori e un sistema S' libero costituito da 5 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta $S = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $M_2(\mathbb{R})$ è 4. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(3x, x-y, y+3) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (3, 2, -4)$ ha componenti $(0, 1, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,0,0),(3,2,-4),(0,1,0)) ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq -2$; $k \neq 1, -2$ ∞^1 soluzioni; $k = 1$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3)**
- Posto $k = -1$ si determinino:
  - l'insieme S_{-1} delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$
    Risposta $S_{-1} = \{(t-1, 1, t-1, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_{-1})$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_{-1}) = \{(t-\lambda, \lambda, t-\lambda, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1,0,1,1), (-1,1,-1,0))$ ______ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_{-1})$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_{-1})^{\perp} = \{(x, x+z, z, -x-z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq -1, 3$, $\lambda_1 = k$, $a_k = 1$; $\lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 1$; $\lambda_3 = 3$, $a_3 = 1$
  se $k = -1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 2$, $\lambda_3 = 3$, $a_3 = 1$
  se $k = 3$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 3$, $a_3 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 1$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice sia reale e simmetrica, quindi ortodiagonalizzabile. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 0$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_3 = \{(0, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_3) = 1$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $M_3(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 7 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 5, valore massimo 7 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 6 vettori e un sistema S' libero costituito da 6 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(1,1,1,1,1)).
E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^5$ è 5. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(2x-y, x+7, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (2,0,3)$ ha componenti $(0,0,1)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((0,1,0),(0,0,1),(2,0,3)) ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & k-1 \\ 3 & 0 & k+3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $\forall k$; $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni; $k = 0$ ∞^2 soluzioni **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino:
  - l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1 X = B_1$
    Risposta $S_1 = \{(1, \frac{-2t-5}{2}, \frac{-2t-1}{2}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_1)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_1) = \{(\lambda, \frac{-2t-5\lambda}{2}, \frac{-2t-\lambda}{2}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (0, -1, -1, 1))$ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_1)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_1)^\perp = \{(\frac{4y+t}{2}, y, -y+t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 9k \\ 0 & k+7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq 5, -10$, $\lambda_1 = k+7$, $a_{k+7} = 1$; $\lambda_2 = 12$, $a_{12} = 1$; $\lambda_3 = -3$, $a_{-3} = 1$
  se $k = 5$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 12$, $a_{12} = 2$, $\lambda_3 = -3$, $a_{-3} = 1$
  se $k = -10$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -3$, $a_{-3} = 2$, $\lambda_2 = 12$, $a_{12} = 1$ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Per $k = 0$ la matrice è reale e simmetrica, quindi è ortodiagonalizzabile. **(pt.2)**
- posto $k = 5$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_{12} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_{12}) = 2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con dim $U=$ dim $W=3$ si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 2, valore massimo 3 **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 5 vettori e un sistema S' libero costituito da 5 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta $S = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $M_2(\mathbb{R})$ è 4. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(x+2, y+4, 4y+x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (0, 2, -5)$ ha componenti $(0, 1, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,0,0),(0,2,-5),(0,1,0)) **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ k-4 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 4$; $k \neq 1, 4$ ∞^1 soluzioni; $k = 1$ ∞^2 soluzioni ________ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determinino:
  - l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$
    Risposta $S_2 = \{(-t-2, t+1, -t-1, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_2)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_2) = \{(-t-2\lambda, t+\lambda, -t-\lambda, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((-1,1,-1,1), (-2,1,-1,0))$ ________ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_2)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_2)^\perp = \{(-t, z-2t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 4 & k+1 \\ k^2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq -\frac{1}{4}, 0$, $\lambda_1 = -2k$, $a_{-2k} = 1$; $\lambda_2 = 1-2k$, $a_{1-2k} = 1$; $\lambda_3 = 1+2k$, $a_{1+2k} = 1$
  se $k = -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, $a_{\frac{1}{2}} = 2$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $a_{\frac{3}{2}} = 1$
  se $k = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $a_1 = 2$, $\lambda_1 = 0$, $a_0 = 1$ ________ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice sia reale e simmetrica, quindi ortodiagonalizzabile. ________ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_3 = \{(2y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_3) = 1$ ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^{1,4}(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 2 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 0, valore massimo 2 ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 4 vettori e un sistema S' libero costituito da 4 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)). E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ è 3. ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(2x-1, 3x, y-5) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (1, 5, 5)$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,0,0),(0,1,0),(1,5,5)) ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base ________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2k & 3k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-k \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0, -1$ ∞^1 soluzioni; $k = -1$ ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determinino:
  - l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2X = B_2$
    Risposta $S_2 = \{(6t-4, 0, \frac{-6t+3}{2}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_2)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_2) = \{(6t-4\lambda, 0, \frac{-6t+3\lambda}{2}, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((6, 0, -3, 1), (-4, 0, \frac{3}{2}, 0))$ ______ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_2)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_2)^\perp = \{(x, y, \frac{8}{3}x, 2x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & k & k-1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq 0, -2$, $\lambda_1 = -2$, $a_{-2} = 1$; $\lambda_2 = k-2$, $a_{k-2} = 1$; $\lambda_3 = k$, $a_k = 1$
  se $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $a_{-2} = 2$, $\lambda_3 = 0$, $a_0 = 1$
  se $k = -2$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -2$, $a_{-2} = 2$, $\lambda_2 = -4$, $a_{-4} = 1$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Per $k = 0$ la matrice è reale e simmetrica, quindi è ortodiagonalizzabile. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 2$, l'autospazio relativo all'autovalore negativo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_{-2} = \{(x, 4x, -3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_{-2}) = 1$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^{3,2}(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 5 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 4, valore massimo 5 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 5 vettori e un sistema S' libero costituito da 5 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)). E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ è 4. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(y+8, 2y, x-2y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (1, -1, 2)$ ha componenti $(1, 0, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,-1,2),(1,0,0),(0,1,0)) ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 2-k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 0, 2$ ∞^1 soluzioni; $k = 0$ ∞^2 soluzioni **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determinino:
  - l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$
    Risposta $S_1 = \{(x, 0, x+1, -5x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_1)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_1) = \{(x, 0, x+\lambda, -5x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1, 0, 1, -5), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_1)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_1)^\perp = \{(5t, y, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & k-1 \\ 0 & 3 & k^2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq -\frac{3}{2}, 0$, $\lambda_1 = -k$, $a_{-k} = 1$; $\lambda_2 = 3-k$, $a_{3-k} = 1$; $\lambda_3 = 3+k$, $a_{3+k} = 1$
  se $k = -\frac{3}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$, $a_{\frac{3}{2}} = 2$, $\lambda_2 = \frac{9}{2}$, $a_{\frac{9}{2}} = 1$
  se $k = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $a_3 = 2$, $\lambda_1 = 0$, $a_0 = 1$ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta posto $k = 1$ la matrice A è reale e simmetrica, quindi ortodiagonalizzabile. **(pt.2)**
- posto $k = 1$, l'autospazio relativo all'autovalore negativo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_{-1} = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_{-1}) = 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 2 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 0, valore massimo 2 **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 6 vettori e un sistema S' libero costituito da 6 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(1,1,1,1,1)).
E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^5$ è 5. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(x-2, -y, x+y+3) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (-3, 3, 4)$ ha componenti $(0, 0, 1)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,0,0),(0,1,0),(-3,3,4)) **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k+1 \\ 2 & k & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0, -1$ ammette ∞^1 soluzioni; se $k = -1$ ammette ∞^2 soluzioni **(pt.3)**
- Posto $k = -2$ si determinino:
  - l'insieme S_{-2} delle soluzioni di $A_{-2}X = B_{-2}$
    Risposta $S_{-2} = \{(t+1, \frac{4t+1}{2}, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_{-2})$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_{-2}) = \{(t+\lambda, \frac{4t+\lambda}{2}, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1,2,0,1), (1, \frac{1}{2}, 0, 0))$ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_{-2})$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_{-2})^\perp = \{(x, -2x, z, 3x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq -\frac{1}{2}, 0$, $\lambda_1 = -k$, $a_{-k} = 1$; $\lambda_2 = 1-k$, $a_{1-k} = 1$; $\lambda_3 = 1+k$, $a_{1+k} = 1$
  se $k = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$, $a_{\frac{1}{2}} = 2$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $a_{\frac{3}{2}} = 1$
  se $k = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $a_1 = 2$, $\lambda_1 = 0$, $a_0 = 1$ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice sia reale e simmetrica, quindi ortodiagonalizzabile. **(pt.2)**
- posto $k = 1$, l'autospazio relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_2 = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_2) = 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^{4,2}(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 6 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 4, valore massimo 6 **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 4 vettori e un sistema S' libero costituito da 4 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta S=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)). E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ è 3. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(6x, y+2, -x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (3, 1, 0)$ ha componenti $(1, 0, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((3,1,0),(0,1,0),(0,0,1)) **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test intermedio - 02/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -k-1 & 0 & -k-1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 & 0 \\ -k-1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Il sistema è compatibile per $k \neq 1$; se $k \neq 1, -1$ ammette ∞^1 soluzioni; se $k = -1$ ammette ∞^2 soluzioni **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino:
  - l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$
    Risposta $S_0 = \{(x, 0, -x, -x-2) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
  - $\mathcal{L}(S_0)$ e una sua base
    Risposta $\mathcal{L}(S_0) = \{(x, 0, -x, -x-2\lambda) \in \mathbb{R}^4 \mid x, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1, 0, -1, -1), (0, 0, 0, -2))$ **(pt.3)**
  - il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S_0)$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$
    Risposta $\mathcal{L}(S_0)^\perp = \{(x, y, x, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 4 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica, al variare di k;
  Risposta se $k \neq 0, 4$, $\lambda_1 = k-1$, $a_{k-1} = 1$; $\lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 1$; $\lambda_3 = 3$, $a_3 = 1$
  se $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 2$, $\lambda_3 = 3$, $a_3 = 1$
  se $k = 4$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 3$, $a_3 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $a_{-1} = 1$ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile e si giustifichi la risposta;
  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice sia reale e simmetrica, quindi ortodiagonalizzabile. **(pt.2)**
- posto $k = 0$, l'autospazio relativo all'autovalore negativo e la relativa dimensione.
  Risposta $V_{-1} = \{(x, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, $dim(V_{-1}) = 2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Siano U, W due sottospazi di $\mathbb{R}^{1,5}(\mathbb{R})$ con dim U= dim W= 3 si determinino il minimo e il massimo valore della dimensione di $U \cap W$.
Risposta Valore minimo 1, valore massimo 3 **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se esistono, un sistema S di generatori costituito da 5 vettori e un sistema S' libero costituito da 5 vettori. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta $S = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. E' impossibile determinare S' perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $M_2(\mathbb{R})$ è 4. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se possibile, un insieme A tale che $\mathcal{L}(A) = U$ dove $U = \{(-x+4, x-2y, 6y+1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile determinare A perché U non è sottospazio vettoriale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se possibile, una base B di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (4, -2, 1)$ ha componenti $(0, 1, 0)$. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta B=((1,0,0),(4,-2,1),(0,1,0)) **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino la base canonica B_C e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Si determini, se possibile, una base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B_C a B'. In caso non sia possibile si giustifichi la risposta.
Risposta Impossibile perché det(A)=0, quindi A non può essere matrice per un cambiamento di base **(pt.3)**