

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 10 & k-1 & 4 \\ 0 & 5 & k & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Per $k \neq -1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = -1$ incompatibile. _____ (pt.3)

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.

Risposta $k = 2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$ e $W = \{(a, b, a+c, a+b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$

Risposta $B_{U \cap W} = ((0, 1, 0, 1))$ _____ (pt.3)

- la dimensione di $U + W$.

Risposta $\dim(U + W) = 4$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in

caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta $\lambda = -2$, $V_{-2} = \{(0, 3h, k, h) \in \mathbb{R}^4 \mid h, k \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2ix + y - z + 1 = 0$.

Risposta $B = ((1, -2i, 0), (0, 1, 1))$ oppure $B = ((1, 0, 2i), (0, 1, 1))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : x^2 + y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C ;

Risposta Iperbole, centro $C = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, fascio: $(x + 2y)l + (2x + y - 1)m = 0$, assi: $3x + 3y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ _____ (pt.4)

- si determini il polo della retta $r : x + y = 0$ nella polarità indotta da C .

Risposta $P = (2, 1)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x + y = 0 = z - 2x$, tangente al piano $\alpha : x - 1 = 0$ e passante per $P = (1, 0, 0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : ix - 1 = 0 = 2ix + y + (i + 1)z$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.

Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e \bar{r} è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloido $Q : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.

Risposta $y = 0$ oppure $x = 0$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-2 & k^2 & 4 \\ 6 & 0 & 12 & 6k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Per $k \neq 2$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = 2$ incompatibile. _____ (pt.3)

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.

Risposta $k = 7$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 0))$ e $W = \{(a, b, b+c, a+b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$

Risposta $B_{U \cap W} = ((1, 0, 0, 1))$ _____ (pt.3)

- la dimensione di $U + W$.

Risposta $\dim(U + W) = 4$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso

affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta $\lambda = -1$, $V_{-1} = \{(-2h, 0, h, k) \in \mathbb{R}^4 \mid h, k \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : x + iy - z + 3 = 0$.

Risposta $B = ((-i, 1, 0), (1, 0, 1))$ oppure $B = ((1, 0, 1), (0, 1, i))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y - 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C ;

Risposta Ellisse, centro $C = (1, -2)$, fascio $(2x+y)l + (x+2y+3)m = 0$, assi $x+y+1=0$, $x-y-3=0$ _____ (pt.4)

- si determini il polo della retta $r : x - y = 0$ nella polarità indotta da C .

Risposta $P = (-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x + y = 0 = z - 2y$, tangente al piano $\alpha : z - 1 = 0$ e passante per $P = (1, 0, 0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppure $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 49$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iy - 1 = 0 = x + 2iy + (1-i)z$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.

Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e \bar{r} è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloido $Q : (y+1)^2 + (z+7)^2 - x = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.

Risposta $y = 0$ oppure $z = 0$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 4 & 1 \\ k-1 & k+1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Per $k \neq -1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = -1$ incompatibile _____ (pt.3)

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.

Risposta $k = -3$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((1, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 3))$ e $W = \{(a + 2b, b, c, b + c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$

Risposta $B_{U \cap W} = ((1, 0, 1, 1))$ _____ (pt.3)

- la dimensione di $U + W$.

Risposta $\dim(U + W) = 4$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso

affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta $\lambda = 2$, $V_2 = \{(h, -k, 4k, k) \in \mathbb{R}^4 \mid h, k \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x - iy + z + 2 = 0$.

Risposta $B = ((1, 0, -2), (0, 1, i))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C ;

Risposta Iperbole, centro $C = (-\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$, fascio $(x + 3y - 1)l + (3x + y)m = 0$, assi $4x + 4y - 1 = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$ - (pt.4)

- si determini il polo della retta $r : x + y = 0$ nella polarità indotta da C .

Risposta $P = (-2, -\frac{3}{2})$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x - 2y = 0 = z + y$, tangente al piano $\alpha : y - 1 = 0$ e passante per $P = (0, 1, 0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iz - 1 = 0 = (i + 1)x + 3y + 2iz$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.

Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e \bar{r} è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloido $Q : (x + 1)^2 + (z - 2)^2 + y = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.

Risposta $x = 0$ oppure $z = 0$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 9 & 1-k & 2k+1 & -6 \\ 3 & 0 & k & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Per $k \neq 1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = 1$ incompatibile. _____ (pt.3)

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.

Risposta $k = -1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((4, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 3))$ e $W = \{(c + b, a, b, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$

Risposta $B_{U \cap W} = ((4, 1, 0, 0))$ _____ (pt.3)

- la dimensione di $U + W$.

Risposta $\dim(U + W) = 4$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso

affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta $\lambda = 3$, $V_3 = \{(-3h, k, h, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid h, k \in \mathbb{R}\}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : ix + 2y - z + 1 - i = 0$.

Risposta $B = ((1, 0, i), (0, 1, 2))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : 4x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C ;

Risposta Ellisse, centro $C = (\frac{8}{15}, \frac{2}{15})$, fascio $(4x - y - 2)l + (-x + 4y)m = 0$, assi $3x + 3y - 2 = 0$, $5x - 5y - 2 = 0$ - (pt.4)

- si determini il polo della retta $r : x - y = 0$ nella polarità indotta da C .

Risposta $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : y - 2x = 0 = z + x$, tangente al piano $\alpha : y - 1 = 0$ e passante per $P = (1, 0, 0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppure $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : 2ix + y = 0 = (i + 1)x + iz - 1$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.

Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e \bar{r} è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. _____ (pt.3)

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloido $Q : (y + 3)^2 + (z + 5)^2 + x = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.

Risposta $y = 0$ oppure $z = 0$ _____ (pt.3)