

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° appello - 08/06/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ hx + y + z - t = 0 \\ x + hy = 0 \end{cases}$$

si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio $V_h \subseteq \mathbb{R}^4$ i cui vettori sono le soluzioni del sistema.

Risposta per $h \neq 0, 1$, $\dim V_h = 1$, per $h = 0, 1$ $\dim V_h = 2$. _____ (pt.2)

Inoltre si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus U$ dove $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid 2\alpha - \beta + \gamma = 0, \beta - \gamma = 0\}$.

Risposta per $h = 1$ _____ (pt.4)

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $v = (2, 1, 1, 9)$ è un autovettore di A

e, in tal caso, il relativo autovalore.

Risposta sì, $\lambda = 3$ _____ (pt.4)

ESERCIZIO 3. Data la matrice reale $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ A_k è diagonalizzabile.

Risposta $\forall k > -1$ _____ (pt.4)

Per quali lo è ortogonalmente?

Risposta per $k = 1$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 4. Data la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ e la retta $r : x = 2$, siano H un punto di r , h la polare di H rispetto a \mathcal{C} , P la proiezione di $O = (0, 0)$ su h . Si determini il luogo descritto da P al variare di H su r . Si studi il luogo trovato.

Risposta $\bar{\mathcal{C}} : 2x^2 + 2y^2 - x = 0$, circonferenza di centro $C = (1/4, 0)$, raggio $1/4$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini la retta congiungente i punti $P_\infty = [(1, 3, 1, 0)]$ e $Q_\infty = [(0, 2, 3, 0)]$.

Risposta $r : \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia \mathcal{Q} la quadrica di equazione $xy = z$. Studiare la quadrica \mathcal{Q} , stabilire la natura dei suoi punti semplici e scrivere un'equazione cartesiana della sua \mathcal{C}_∞ .

Risposta paraboloidi iperbolico, $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$, $r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.4)

Stabilire se il piano $\alpha : 2x - y + z - 2 = 0$ è tangente alla quadrica \mathcal{Q} e in tal caso determinare le coordinate del punto di tangenza.

Risposta Sì, $P = (1, -2, -2)$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4° appello - 08/06/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 2z - 2t = 0 \\ x + (h-1)y = 0 \\ (h-1)x + y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione dello spazio $V_h \subseteq \mathbb{R}^4$ i cui vettori sono le soluzioni del sistema.

Risposta per $h \neq 1, 2$, $\dim V_h = 1$, per $h = 1, 2$, $\dim V_h = 2$ _____ (pt.2)

Inoltre si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ risulta $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus U$ dove $U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid 4\alpha - 2\beta - \delta = 0, 2\beta + \delta = 0\}$.

Risposta per $h = 2$ _____ (pt.4)

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $v = (1, 7, 3, 1)$ è un autovettore di A

e, in tal caso, il relativo autovalore.

Risposta Sì, $\lambda = 4$ _____ (pt.4)

ESERCIZIO 3. Data la matrice reale $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$, si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ A_k è diagonalizzabile.

Risposta $\forall k > -1/2$ _____ (pt.4)

Per quali lo è ortogonalmente?

Risposta $k = 2$ _____ (pt.1)

ESERCIZIO 4. Data la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 2$ e la retta $r : y = 2$, siano H un punto di r , h la polare di H rispetto a \mathcal{C} , P la proiezione di $O = (0, 0)$ su h . Si determini il luogo descritto da P al variare di H su r . Si studi il luogo trovato.

Risposta $\bar{\mathcal{C}} : x^2 + y^2 - y = 0$, circonferenza di centro $C = (0, 1/2)$, raggio $1/2$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini la retta congiungente i punti $P_\infty = [(1, 2, 1, 0)]$ e $Q_\infty = [(3, 1, 0, 0)]$.

Risposta $r : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sia \mathcal{Q} la quadrica di equazione $xz = y$. Studiare la quadrica \mathcal{Q} , stabilire la natura dei suoi punti semplici e scrivere un'equazione cartesiana della sua \mathcal{C}_∞ .

Risposta paraboloidi iperbolico, $\mathcal{C}_\infty = r \cup s$, $r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.4)

Stabilire se il piano $\alpha : x - y - 3z + 3 = 0$ è tangente alla quadrica \mathcal{Q} e in tal caso determinare le coordinate del punto di tangenza.

Risposta Sì, $P = (-3, -3, 1)$ _____ (pt.3)