# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello - 30/03/2015

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & k-1 & k+1 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  **Risposta** Il sistema è compatibile per $k \neq 1$, e in tal caso ammette $\infty^2$ soluzioni **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme $S$ delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  **Risposta** $k = 3$ perché in tal caso il sistema è omogeneo **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

  **Risposta** $S = \{(-2\beta, \alpha + 3, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché $S$ non è un sottospazio **(pt.3)**

**ESERCIZIO 2.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici $A_k$ e $D$ risultano simili;

  **Risposta** $k = 2$ **(pt.2)**
- per ciascuno dei valori di $k$ precedentemente trovati si determini una matrice $P$ tale che $D = P^{-1} A_k P$.

  **Risposta** $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((k,0,0,1),(2k,0,k-2,k))$ e $W = \mathcal{L}((1,0,1,0),(2,1,0,0))$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $U_k$;

  **Risposta** Se $k \neq 2$ $\dim U_k = 2$, se $k = 2$ $\dim U_2 = 1$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

  **Risposta** $k \neq -1$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 4.** In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k: \ x + z - k - 1 = 0 = ky + 3z$ e $s_k: y = 0 = 2kx + 7y - z - 4$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $r_k$ ed $s_k$ risultano sghembe.

  **Risposta** $k \neq -2, 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia $r_1$ che $s_1$;

  **Risposta** $2x - y - z - 4 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (2, 0, -1)$ e ortogonale sia a $r_1$ che a $s_1$.

  **Risposta** $x + 2y - 2 = 0 = y - z - 1$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ x^2 + y^2 + 2xy - 4y = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

  **Risposta** Parabola; $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, asse: $x + y - 1 = 0$, vertice: $V = (3/4, 1/4)$ **(pt.3)**
- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto $P = (1, 0)$;

  **Risposta** $t_1: \ y = 0$, $t_2: \ x - 1 = 0$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k: \ (k+1)x^2 + ky^2 - 5z^2 + 4x - 10z + k - 1 = 0$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  **Risposta** $k = 0$ **(pt.1)**
- posto $k = 2$ si stabilisca se i punti semplici di $\mathcal{Q}_2$ possono essere di tipo parabolico, motivando la risposta.

  **Risposta** $\mathcal{Q}_2$ non può avere punti semplici parabolici perché è una quadrica generale. **(pt.2)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello - 30/03/2015

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 5k \\ 2 & k-2 & k^2 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  **Risposta** Il sistema è compatibile per $k \neq 2$, e in tal caso ammette $\infty^2$ soluzioni **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme $S$ delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  **Risposta** $k = -5$ perché in tal caso il sistema è omogeneo **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

  **Risposta** $S = \{(-2\alpha+1, 2\beta-2\alpha+1, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché $S$ non è un sottospazio **(pt.3)**

**ESERCIZIO 2.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k+1 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici $A_k$ e $D$ risultano simili;

  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2)**
- per ciascuno dei valori di $k$ precedentemente trovati si determini una matrice $P$ tale che $D = P^{-1} A_k P$.

  **Risposta** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((4k, 0, k-4, k), (k, 0, 0, 1))$ e $W = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 2, 0))$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $U_k$;

  **Risposta** Se $k \neq 4$ $\dim U_k = 2$, se $k = 4$ $\dim U_4 = 1$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

  **Risposta** $k \neq 1$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 4.** In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \; 3kx + y + 18 = 0 = z$ e $s_k : 2y + kz = 0 = x - y + k + 1$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $r_k$ ed $s_k$ risultano sghembe.

  **Risposta** $k \neq -3, 2$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia $r_2$ che $s_2$;

  **Risposta** $6x + y + 7z + 18 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (3, 0, 1)$ e ortogonale sia a $r_2$ che a $s_2$.

  **Risposta** $x - 6y - 3 = 0 = 7y - z + 1$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : \; x^2 + y^2 + 2xy - 6x = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

  **Risposta** Parabola; $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, asse: $2x + 2y - 3 = 0$, vertice: $V = (3/8, 9/8)$ **(pt.3)**
- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto $P = (0, 1)$;

  **Risposta** $t_1 : \; x = 0$, $t_2 : \; x - 2y + 2 = 0$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : \; k^2x^2 + 3y^2 + (k+1)z^2 + 2x + 1 = 0$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  **Risposta** $k = -1$ **(pt.1)**
- posto $k = 3$ si stabilisca se i punti semplici di $\mathcal{Q}_3$ possono essere di tipo parabolico, motivando la risposta.

  **Risposta** $\mathcal{Q}_3$ non può avere punti semplici parabolici perchè è una quadrica generale. **(pt.2)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello - 30/03/2015

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 3 \\ 2 & k-1 & k+1 & 6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  **Risposta** Il sistema è compatibile per $k \neq -1$, e in tal caso ammette $\infty^2$ soluzioni ______ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme $S$ delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  **Risposta** $k = -3$ perché in tal caso il sistema è omogeneo ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0 X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

  **Risposta** $S = \{(-3\beta + 3, \alpha, \alpha - 6, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché $S$ non è un sottospazio ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 2.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici $A_k$ e $D$ risultano simili;

  **Risposta** $k = -2$ ______ **(pt.2)**
- per ciascuno dei valori di $k$ precedentemente trovati si determini una matrice $P$ tale che $D = P^{-1} A_k P$.

  **Risposta** $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((0, 3k, k, k-3), (0, k, 1, 0))$ e $W = \mathcal{L}((0, 1, 0, 1), (3, 2, 0, 1))$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $U_k$;

  **Risposta** Se $k \neq 3$ $\dim U_k = 2$, se $k = 3$ $\dim U_3 = 1$ ______ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

  **Risposta** $k \neq -1$ ______ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 4.** In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \ x = 0 = 2y + kz + 8$ e $s_k : 4kx + y = 0 = x + z + k + 2$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $r_k$ ed $s_k$ risultano sghembe.

  **Risposta** $k \neq -4, 2$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia $r_2$ che $s_2$;

  **Risposta** $9x + y + z + 4 = 0$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0, 1, 3)$ e ortogonale sia a $r_2$ che a $s_2$.

  **Risposta** $x - 9y + 9 = 0 = y - z + 2$ ______ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C} : \ x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

  **Risposta** Parabola; $C_\infty = [(0, 1, 0)]$, asse: $x + 2 = 0$, vertice: $V = (-2, -3/2)$ ______ **(pt.3)**
- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto $P = (1, 1)$;

  **Risposta** $t_1 : \ 5x - y - 4 = 0$, $t_2 : \ x - y = 0$ ______ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k : \ (k+2)x^2 + (k+3)y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + k + 1 = 0$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  **Risposta** $k = -1$ ______ **(pt.1)**
- posto $k = 2$ si stabilisca se i punti semplici di $\mathcal{Q}_2$ possono essere di tipo parabolico, motivando la risposta.

  **Risposta** $\mathcal{Q}_2$ non può avere punti semplici parabolici perché è una quadrica generale. ______ **(pt.2)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $3^o$ appello - 30/03/2015

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 2 \\ 2k+1 & -3 & 1-k & 6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  **Risposta** Il sistema è compatibile per $k \neq 1$, e in tal caso ammette $\infty^2$ soluzioni **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme $S$ delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, motivando la risposta;

  **Risposta** $k = 2$ perché in tal caso il sistema è omogeneo **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0X = B_0$ e, se possibile, una sua base; in caso non sia possibile si motivi la risposta.

  **Risposta** $S = \{(\alpha, 2\beta, -\alpha+2, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, non è possibile determinarne una base perché $S$ non è un sottospazio **(pt.3)**

**ESERCIZIO 2.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ k-2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due matrici $A_k$ e $D$ risultano simili;

  **Risposta** $k = 4$ **(pt.2)**
- per ciascuno dei valori di $k$ precedentemente trovati si determini una matrice $P$ tale che $D = P^{-1}A_kP$.

  **Risposta** $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}((1,0,0,k),(k,k-5,0,5k))$ e $W = \mathcal{L}((0,1,0,1),(0,1,2,0))$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $U_k$;

  **Risposta** Se $k \neq 5$ $\dim U_k = 2$, se $k = 5$ $\dim U_5 = 1$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_k + W$ è diretta.

  **Risposta** $k \neq -1$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 4.** In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k:\ 3x + 2ky - z - 4 = 0 = x$ e $s_k: kx + 3z = 0 = y + z - k - 1$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $r_k$ ed $s_k$ risultano sghembe.

  **Risposta** $k \neq -2, 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini, se possibile:

- un'equazione cartesiana del piano contenente sia $r_1$ che $s_1$;

  **Risposta** $x - 2y + z + 4 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0,1,0)$ e ortogonale sia a $r_1$ che a $s_1$.

  **Risposta** $2x + y - 1 = 0 = x - z$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ 3y^2 + 2x + 12y + 3 = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici;

  **Risposta** Parabola; $C_\infty = [(1,0,0)]$, asse: $y + 2 = 0$, vertice: $V = (9/2, -2)$ **(pt.3)**
- si determinino delle equazioni cartesiane delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto $P = (12, 0)$;

  **Risposta** $t_1:\ x + 15y - 12 = 0$, $t_2:\ x - 3y - 12 = 0$ **(pt.2)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}_k:\ kx^2 + (k+4)y^2 + 6z^2 + 4x + k + 3 = 0$, dove $k$ è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  **Risposta** $k = -4$ **(pt.1)**
- posto $k = 0$ si stabilisca se i punti semplici di $\mathcal{Q}_0$ possono essere di tipo parabolico, motivando la risposta.

  **Risposta** $\mathcal{Q}_0$ non può avere punti semplici parabolici perchè è una quadrica generale. **(pt.2)**