UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - **Algebra ed Elementi di Geometria** - 5^o appello - 28.08.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k-1 & 1 \\ 4 & k+1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k \\ -2 \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1, \ \infty^2$ soluzioni, $k = 1, \ \infty^3$ soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto ora $k = 0$, si determini:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(\alpha, \beta, -1 + 1/2\beta, -1 - 2\alpha - 1/2\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(0,0,0,1)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $v = (1,1,-1)$ e $w = (1,0,2)$.

- Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo w;

  Risposta $v_w = -1/5$, $\overline{v_w} = (-1/5, 0, -2/5)$ ______ **(pt.2)**

- si completi $\{w, v\}$ a base per $\mathbb{R}^3$ e si determini la base ortogonale ottenuta applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base così ottenuta.

  Risposta $B = ((1,0,2),(1,1,-1),(0,1,0))$, $B' = ((1,0,2),(6/5,1,-3/5),(-3/7,9/14,3/14))$ _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta invertibile.

Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.1)**

Posto $k = 6$ di determinino:

- gli autovalori della matrice A_6 e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $\lambda_1 = -2$, $a_{-2} = g_{-2} = 1$, $\lambda_2 = 1$, $a_1 = g_1 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $a_3 = g_3 = 1$ ______ **(pt.3)**

- una matrice diagonale D simile a A_6 e una relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Circonferenza di centro $C = (1,2)$ e raggio $r = 3$; assi: $\alpha(x-1) + \beta(y-2) = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ dove è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani $\alpha : 2x + y - 1 = 0$ e $\beta : x + 2y + z - 2 = 0$ e il punto $P = (1,0,1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale di P su α;

  Risposta $H = (3/5, -1/5, 1)$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P e parallela a α e β.

  Risposta $2x + y - 2 = 0 = x + 2y + z - 2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 2z^2 + 2yz + 2x + 2 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si determini la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

- Si riconosca la conica sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $x = 0$.

  Risposta iperbole ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 28.08.2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & k+2 & 6 \\ 2 & k & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -2 \\ -1-k \end{pmatrix}$ e $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$, ∞^2 soluzioni, $k = 0$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto ora $k = -1$, si determini:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{((-2-\alpha-6\beta)/4, -1+\alpha/2, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $\mathcal{L}(1,0,0,0)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i vettori $v = (1,1,-1)$ e $w = (0,1,2)$.

- Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo w;

  Risposta $v_w = -1/5$, $\overline{v_w} = (0,-1/5,-2/5)$ ______ **(pt.2)**

- si completi $\{w, v\}$ a base per $\mathbb{R}^3$ e si determini la base ortogonale ottenuta applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base così ottenuta.

  Risposta $B = ((0,1,2),(1,1,-1),(1,0,0))$, $B' = ((0,1,2),(1,6/5,-3/5),(9/14,-3/7,3/14))$ _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta invertibile.

Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.1)**

Posto $k = 5$ di determinino:

- gli autovalori della matrice A_5 e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $\lambda_1 = 2$, $a_2 = g_2 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $a_4 = g_4 = 1$, $\lambda_3 = 6$, $a_6 = g_6 = 1$ ______ **(pt.3)**

- una matrice diagonale D simile a A_5 e una relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Circonferenza di centro $C = (-1,3)$ e raggio $r = 3$; assi: $\alpha(x+1)+\beta(y-3) = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$ dove è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani $\alpha : 2x + y + 2 = 0$ e $\beta : x + 2y + z - 2 = 0$ e il punto $P = (-1,1,1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale di P su α;

  Risposta $H = (-7/5, 4/5, 1)$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta passante per P e parallela a α e β.

  Risposta $2x + y + 1 = 0 = x + 2y + z - 2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 2z^2 + 2yz + 6x - 2z + 10 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si determini la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

- Si riconosca la conica sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $x = 2$.

  Risposta iperbole ______ **(pt.2)**