UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 3-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -1$; $k \neq 4, -1$ soluzione unica, $k = 4$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -1, 4$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 4$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = -1$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determini

- l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(-3/2, 1/2, 3/2)\}$ ______ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta k, -1, 3 ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq -1, 3$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k ______ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-1}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, 0, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 6 = 0$.

Risposta $S = (2, 2, 7)$ ______ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 11 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - x - 2y + 1 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(2, -1, 5)]$, assi: $x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 1 = 0$, asintoti: $x + 2y = 0$, $2x - y - 1 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 4x + 2y + 2z + 3 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-1, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\alpha$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\beta$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 1$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 3$. ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -2$; $k \neq -2, 3$ soluzione unica, $k = 3$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -2, 3$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 3$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = -2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determini

- l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1 X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(-11/3, 1/3, 4/3)\}$ ______ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k+1$, -1, 3 ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq \pm 2$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k ______ **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-2}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (1, 0, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 1 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 11 = 0$.

Risposta $S = (1, 2, 7)$ ______ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 8z + 8 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(2, -6, 5)]$, assi: $x - 3y - 4 = 0$, $3x + y = 0$, asintoti: $x + 2y + 2 = 0$, $2x - y - 2 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 6x + 2y + 4z + 8 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : x = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-2, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\beta$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 2$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 4$. ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-k \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ 2 \\ 5-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k \neq 0, 5$ soluzione unica, $k = 5$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0, 5$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 5$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determini

- l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(1, 1, 2)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k-1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k-1,\ -1,\ 3$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (3, 0, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 3 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 1 = 0$.

Risposta $S = (3, 2, 7)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 8z + 16 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 2 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(-3, -1, 5)]$, assi: $x - 3y = 0$, $3x + y + 2 = 0$, asintoti: $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 6x + 4y + 2z + 5 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-1, 0, -2)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\alpha$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\beta$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 1$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 5$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-2 \\ 0 & k+2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ -1-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -3$; $k \neq -3, 2$ soluzione unica, $k = 2$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -3, 2$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 2$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = -3$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determini

- l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(-23/4, 1/4, 5/4)\}$ ______ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_1)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k+1$, -1, 3 ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq \pm 2$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k ______ **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-2}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, -1, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z - 2 = 0$.

Risposta $S = (2, 1, 7)$ ______ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8z + 10 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(2, 4, 5)]$, assi: $x - 3y + 2 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, asintoti: $x + 2y - 2 = 0$, $2x - y = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 8x + 2y + 6z + 15 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : x = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-3, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\beta$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 3$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 5$. ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k+2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-3 \\ 2 \\ 7-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 1$; $k \neq 1, 6$ soluzione unica, $k = 6$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 1, 6$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 6$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 1$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determini

- l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(3, -1, 0)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$.

  Risposta $\{(0, a, b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k-1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k-1, -1, 3$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, 1, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y - 2$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 14 = 0$.

Risposta $S = (2, 3, 7)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 8z + 14 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x + 4y + 7 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(-8, -1, 5)]$, assi: $x - 3y + 1 = 0$, $3x + y + 5 = 0$, asintoti: $x + 2y + 2 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 8x + 6y + 2z + 7 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-1, 0, -3)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\alpha$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\beta$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 1$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 7$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-3 \\ 0 & k+3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ 2 \\ -3-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -4$; $k \neq -4, 1$ soluzione unica, $k = 1$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -4, 1$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 1$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = -4$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determini

- l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(-23/4, 1/4, 5/4)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta k, -1, 3 **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq -1, 3$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-1}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, -2, -1)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y + 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z - 10 = 0$.

Risposta $S = (2, 0, 7)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 8z + 11 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 10y - 11 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(2, -11, 5)]$, assi: $x - 3y - 7 = 0$, $3x + y + 1 = 0$, asintoti: $x + 2y + 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 2x + 2y = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : x = 1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (0, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\beta$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 2$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k+3 \\ 0 & k-3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-4 \\ 2 \\ 9-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 2, 7$ soluzione unica, $k = 7$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 2, 7$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 7$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determini

- l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0 X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(11/2, -1/2, 1/2)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_0)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k-1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k-1$, -1, 3 **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, 0, -2)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 8 = 0$.

Risposta $S = (2, 2, 6)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 20 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(7, -1, 5)]$, assi: $x - 3y - 2 = 0$, $3x + y - 4 = 0$, asintoti: $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y - 3 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 2x + 2z + 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (-1, 0, 0)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\alpha$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\beta$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x + 1$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 1$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - **Algebra ed Elementi di Geometria** - 1^o appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -k-4 \\ 0 & k+4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ 2 \\ -5-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -5$; $k \neq -5, 0$ soluzione unica, $k = 0$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -5, 0$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 0$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = -5$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si determini

- l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$;

  Risposta $S_2 = \{(-83/7, 1/7, 8/7)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$.

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta k, -1, 3 **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq -1, 3$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-1}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, 0, 0)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 4 = 0$.

Risposta $S = (2, 2, 8)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 4 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x + 6y - 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(2, 9, 5)]$, assi: $x - 3y + 5 = 0$, $3x + y - 3 = 0$, asintoti: $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 4y^2 + 2xz + 2yz + 2y - 2z - 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : x = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (1, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\beta$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y = 0 = x - 1$, $r_2 : y = 0 = x + 2z + 1$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1º appello - 20/01/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4-k \\ 0 & k-4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-5 \\ 2 \\ 11-2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k \neq 3, 8$ soluzione unica, $k = 8$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 3, 8$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune (stella propria di piani), $k = 8$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 3$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (stella impropria di piani). **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si determini

- l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$;

  Risposta $S_2 = \{(3, -1, 0)\}$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$.

  Risposta $\{(0, a, b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k+1, -1, 3$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq \pm 2$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta per ogni k **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determini, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-2}. Nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

Risposta $\mathcal{B} = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{C})$ si determini il simmetrico del punto $P = (2, 0, -3)$ rispetto alla retta $r : x - 2 = 0 = y - 1$ nella giacitura del piano $\alpha : 5x - 8y + 2z + 10 = 0$.

Risposta $S = (2, 2, 5)$ **(pt.2)**

Si determini la sfera avente centro nel punto di intersezione tra la retta r e il piano α e passante per P.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 12z + 31 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 9x - 8y + 11 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta Iperbole equilatera. $C = [(12, -1, 5)]$, assi: $x - 3y - 3 = 0$, $3x + y - 7 = 0$, asintoti: $x + 2y - 2 = 0$, $2x - y - 5 = 0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : 4x^2 - y^2 - 2xz - 2yz - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : x = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Cono di vertice $V = (0, -1, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{Q}_\alpha$ è un'iperbole. $\mathcal{Q}_\beta$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x = 0 = y + 1$, $r_2 : x = 0 = y + 2z + 3$. **(pt.4)**