

La forma canonica di Jordan

1 ottobre 2009

Matrici simili rappresentano il medesimo automorfismo di uno spazio vettoriale rispetto basi differenti. Pertanto esse condividono alcune significative caratteristiche (determinante, rango, etc.) ed è importante poterle facilmente identificare. Come visto in precedenza, la relazione di similitudine è una relazione di equivalenza; in queste note mostreremo come costruire un rappresentante privilegiato di ogni classe di similitudine.

Servono alcuni risultati preliminari.

Teorema 1. *Siano $a(x)$, $b(x)$ due polinomi e supponiamo*

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

con $\deg r(x) < \deg b(x)$. Allora,

$$\gcd(a(x), b(x)) = \gcd(b(x), r(x)).$$

Dimostrazione. Sia $m(x)$ il massimo comun divisore fra $a(x)$ e $b(x)$. Allora, $m(x)$ divide $r(x) = a(x) - q(x)b(x)$; pertanto $m(x)$ divide il massimo comun divisore fra $b(x)$ e $r(x)$. Viceversa, se $n(x)$ divide $b(x)$ e $r(x)$, allora $n(x)$ divide anche $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$, pertanto $n(x)$ divide $m(x)$. La tesi segue. \square

Teorema 2 (Algoritmo euclideo). *Siano $a(x)$, $b(x)$ due polinomi. L'equazione*

$$a(x)a'(x) + b(x)b'(x) = c(x) \tag{1}$$

ammette soluzioni $a'(x)$, $b'(x)$ se, e solamente se, $\gcd(a(x), b(x))$ divide $c(x)$.

Dimostrazione. Sia $g(x) = \gcd(a(x), b(x))$. Chiaramente, $g(x)$ deve dividere ogni prodotto della forma di $a(x)a'(x)$ e $b(x)b'(x)$. Ne segue che, affinché l'equazione (1) ammetta soluzione si deve avere $g(x)|c(x)$.

Supponiamo $\deg a(x) \geq \deg b(x)$ e procediamo a calcolare le seguenti divisioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = b(x)q_0(x) + r_1(x) \\ b(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x) \\ \vdots = \vdots \\ r_{k-1}(x) = r_k(x)q_k(x) + r_{k+1}(x) \\ r_k(x) = r_{k+1}(x)q_{k+1}(x) \end{array} \right. \quad (2)$$

Chiaramente $\deg r_i(x) < \deg r_{i-1}(x)$, per cui il processo termina dopo un numero finito di passaggi. Per quanto visto nel Teorema 1,

$$\gcd(a(x), b(x)) = \gcd(b(x), r_1(x)) = \dots = \gcd(r_k(x), r_{k+1}(x)) = r_{k+1}(x).$$

Inoltre, dalla (2),

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{k+1}(x) = r_{k-1}(x) - r_k(x)q_k(x) \\ r_k(x) = r_{k-2}(x) - r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) \\ \vdots = \vdots \\ r_2(x) = b(x) - r_1(x)q_1(x) \\ r_1(x) = a(x) - b(x)q_0(x) \end{array} \right.$$

Pertanto, sostituendo a partire dall'ultima riga si ottiene un modo per scrivere $r_{k+1}(x)$ come combinazione di $a(x)$ e $b(x)$. Questo dimostra la seconda parte del teorema. \square

Teorema 3 (Teorema di decomposizione primaria). *Sia $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ una matrice di polinomio caratteristico $P_M(x)$ e supponiamo che $P_m(x) = Q(x)R(x)$ con $Q(x)$ e $R(x)$ coprimi fra loro. Allora*

$$\mathbb{K}^n = E \oplus F$$

ove $E = \mathfrak{I}Q(M)$ e $F = \mathfrak{I}R(M)$. Inoltre $E = \ker R(M)$ e $F = \ker Q(M)$.

Dimostrazione. Poiché i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono coprimi, esistono due polinomi $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ tali che

$$R(x)R_1(x) + Q(x)Q_1(x) = 1. \quad (3)$$

Moltiplicando la (3) per la matrice identica e sostituendo M ad x si ottiene

$$R(M)R_1(M) + Q(M)Q_1(M) = I_n = R_1(M)R(M) + Q_1(M)Q(M) \quad (4)$$

Ora, consideriamo $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$:

$$\mathbf{v} = (R(M)R_1(M) + Q(M)Q_1(M))\mathbf{v} = R(M)(R_1(M)\mathbf{v}) + Q(M)(Q_1(M)\mathbf{v}). \quad (5)$$

Pertanto, posto $\mathbf{x} = Q_1(M)\mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = R_1(M)\mathbf{v}$ abbiamo

$$\mathbf{v} = R(M)\mathbf{x} + Q(M)\mathbf{y},$$

cioè $\mathbb{K}^n = E + F$. Inoltre se $\mathbf{x} \in E$, allora esiste \mathbf{w} tale che $\mathbf{x} = Q(M)\mathbf{w}$; pertanto,

$$R(M)\mathbf{x} = R(M)Q(M)\mathbf{w} = P_M(M)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

per il teorema di Hamilton–Cayley. Questo significa che

$$E \subseteq \ker R(M)$$

e, similmente

$$F \subseteq \ker Q(M).$$

D'altro canto se $\mathbf{y} \in E \cap F$ abbiamo

$$\mathbf{y} = (Q_1(M)Q(M) + R_1(M)R(M))\mathbf{y} = Q_1(M)(Q(M)\mathbf{y}) + R_1(M)(R(M)\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Pertanto la somma $K = E \oplus F$ è diretta.

Infine, da $\dim E + \dim F = n$ e $\dim \ker R(M) + \dim \ker Q(M) \leq n$ segue che deve essere $E = \ker R(M)$ e $F = \ker Q(M)$. \square

Definizione 1. Sia $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ una matrice di polinomio caratteristico P_M e supponiamo che

$$P_M(x) = \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i)^{m_i}.$$

Al variare di i , i sottospazi vettoriali

$$E_{\lambda_i} = \ker(M - \lambda_i I)^{m_i}$$

sono detti *autospazi generalizzati* associati all'autovalore λ_i .

Teorema 4. Ogni autospazio generalizzato è M -invariante. In altre parole se $\mathbf{x} \in E_\lambda$, allora $M\mathbf{x} \in E_\lambda$.

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{x} \in E_\lambda$. Questo significa in particolare che

$$(M - \lambda I)^m \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

In particolare,

$$(M - \lambda I)^m (M - \lambda I) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioè $(M - \lambda I)\mathbf{x}$ appartiene ad E_λ . Da questo segue che $M\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \in E_\lambda$. D'altro canto, $\lambda\mathbf{x} \in E_\lambda$ per le proprietà di chiusura degli spazi vettoriali. Ne segue che anche $M\mathbf{x} \in E_\lambda$. \square

Conseguenza dei due teoremi precedenti sono:

1. Per ogni matrice quadrata M di dimensioni $n \times n$ è possibile decomporre uno spazio vettoriale \mathbb{K}^n su cui essa agisce in autospazi generalizzati $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_t}$ di modo che

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_t}.$$

2. L'applicazione lineare M trasforma ogni sottospazio E_{λ_i} in un suo sottoinsieme.
3. Pertanto, rispetto una base per \mathbb{K}^n ottenuta unendo le basi degli E_{λ_i} la matrice M assume la forma *diagonale a blocchi*

$$M' = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_t \end{pmatrix},$$

ove il singolo blocco M_i corrisponde alla restrizioni dell'endomorfismo indotto da M sull'autospazio generalizzato E_{λ_i} .

4. Rimane comunque da risolvere il problema di scrivere in forma canonica i blocchi M_i .

Definizione 2. Una matrice $T \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ è detta *nilpotente* se esiste un k tale che $T^k = \mathbf{0}$. Il più piccolo k tale che $T^k = \mathbf{0}$ è detto *indice di nilpotenza* di T .

Teorema 5. Sia T una matrice nilpotente e supponiamo che \mathbf{v} sia un vettore tale che $T^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$, mentre $T^w \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ per $w < k$ (questo è altrimenti detto asserendo che k è il periodo di \mathbf{v}). Allora, i vettori

$$T^0 \mathbf{v}, T^1 \mathbf{v}, \dots, T^{k-1} \mathbf{v}$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Se i vettori sopra indicati fossero linearmente dipendenti, allora potremmo scrivere un polinomio non nullo $f(x)$ di grado al più $k-1$ tale che

$$f(T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Sia adesso $h(x)$ il massimo comun divisore fra $f(x)$ e x^k . Chiaramente $h(x) = x^l$ per qualche $l < k$. D'altro canto, poiché

$$h(x) = f(x)f_1(x) + x^k g_1(x),$$

si ha

$$h(T)\mathbf{x} = f_1(B)f(B)\mathbf{x} + g_1(x)B^k\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

contro l'ipotesi che k sia il periodo di \mathbf{x} . □

Osserviamo che $T_i = M - \lambda_i I$ ristretta all'autospazio generalizzato E_{λ_i} è nilpotente. Infatti $(M - \lambda_i I)^{m_i}$ ristretta ad E_{λ_i} corrisponde all'endomorfismo nullo.

Il nostro obiettivo è riuscire ora a caratterizzare le matrici nilpotenti e a scriverle in forma canonica; infatti, se sappiamo rappresentare T_i , automaticamente riusciamo anche a rappresentare $M_i = T_i + \lambda_i I$.

Ci servono alcune definizioni ulteriori.

Definizione 3. Sia T una matrice. Il sottospazio T -ciclico generato da un vettore \mathbf{x} è il sottospazio $Z(\mathbf{x}, T)$ generato da tutti i vettori $T^k\mathbf{x}$ con $k \geq 0$.

Ricordiamo che, in generale, non tutti gli elementi $T^k\mathbf{x}$ sono linearmente indipendenti. In particolare, se T è una matrice nilpotente di indice di nilpotenza w ,

$$T^j\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

per ogni $j \geq w$.

Teorema 6 (Teorema di decomposizione ciclica). *Sia T una matrice nilpotente su di uno spazio vettoriale finito dimensionale V . Allora esistono dei vettori non nulli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ tali che*

$$V = Z(\mathbf{v}_1, T) \oplus Z(\mathbf{v}_2, T) \oplus \dots \oplus Z(\mathbf{v}_r, T).$$

Inoltre, chiamato k_i il minimo esponente tale che

$$T^{k_i} = \mathbf{0} \quad \text{ristretto a} \quad Z(\mathbf{v}_i, T)$$

si ha $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$.

Osservazioni:

1. ogni sottospazio T -ciclico è T -invariante; pertanto è possibile scegliere una base di V tale che la matrice T' dell'applicazione lineare associata a T rispetto tale base assume una forma diagonale a blocchi, con ogni blocco corrispondente ad esattamente un sottospazio ciclico;
2. il numero k_i che compare nel teorema è, in effetti, proprio la *dimensione* di $Z(\mathbf{v}_i, T)$;

3. La forma che T , ristretta ad un sottospazio ciclico di dimensione k_i , assume è del

$$A_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Pertanto, la forma che l'applicazione associata ad M assumerà quando ristretta ad un sottospazio ciclico $Z(\mathbf{v}, T_i)$ dell'autospazio generalizzato E_{λ_i} risulta

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

5. La matrice $J_k(\lambda)$ di cui al punto precedente è detta *blocco fondamentale di Jordan* di ordine k e valore caratteristico λ .
6. Pertanto possiamo affermare che ogni matrice M è simile ad una matrice diagonale a blocchi del tipo

$$M' = \begin{pmatrix} J_{r_{11}}(\lambda_1) & & & & & & & & \\ & J_{r_{12}}(\lambda_1) & & & & & & & \\ & & \dots & & & & & & \\ & & & J_{r_{1t_1}}(\lambda_1) & & & & & \\ & & & & J_{r_{21}}(\lambda_2) & & & & \\ & & & & & J_{r_{22}}(\lambda_2) & & & \\ & & & & & & \dots & & \end{pmatrix}.$$

7. Rimane il problema di determinare le dimensioni dei sottospazi ciclici (per una matrice nilpotente).

Procediamo come segue:

1. In generale, per una matrice M qualsiasi:

$$\ker M^i \subseteq \ker M^j \quad \text{per ogni } i < j.$$

2. Cerchiamo vettori \mathbf{v}_i di *periodo massimo* negli autospazi generalizzati associati ad M .

3. Supponiamo che T sia una matrice nilpotente di indice di nilpotenza $k > i$ e consideriamo un vettore \mathbf{v} di periodo i in $\ker T^i$, questo determinerà esattamente i vettori,

$$\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \dots, T^{i-1}\mathbf{v}$$

rispettivamente in

$$\ker T^i \setminus \ker T^{i-1}, \ker T^{i-1} \setminus \ker T^{i-2}, \dots, \ker T.$$

4. Siano

$$\rho_i = \dim \ker T^i; \quad m = \min\{i : \rho_i = \rho_{i+1}\}$$

Osserviamo che, in generale,

$$\rho_i - \rho_{i-1} \geq \rho_{i+1} - \rho_i.$$

Sia infatti $\alpha_i = \rho_i - \rho_{i-1}$. In particolare, si possono scegliere α_{i+1} vettori in $\ker T^{i+1} \setminus \ker T^i$ linearmente indipendenti. Denotiamo tali vettori con

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\alpha_{i+1}}.$$

Essi inducono naturalmente α_{i+1} vettori

$$T\mathbf{v}_1, \dots, T\mathbf{v}_{\alpha_{i+1}}$$

che sono indipendenti e si trovano in $\ker T^i \setminus \ker T^{i-1}$. Pertanto,

$$\alpha_i = \dim \ker T^i - \dim \ker T^{i-1} \geq \alpha_{i+1},$$



da cui segue la tesi.

5. Per ogni indice i , con $1 \leq i < m$, si ha

$$\ker T^i \subset \ker T^{i+1} \quad \text{ma} \quad \ker T^i \neq \ker T^{i+1}.$$

6. È possibile associare alla matrice T una rappresentazione grafica, detta *diagramma di Young*, che univocamente descrive la situazione.

Definizione 4. Si dice *diagramma di Young* una collezione finita di celle, allineate sulla sinistra, in modo tale che il numero di celle per riga non sia crescente.

Ad esempio,  o  sono diagrammi di Young.

7. Per quanto serve a noi il diagramma si costruisce come segue:

- (a) la prima colonna consta di esattamente ρ_1 quadratini;
- (b) ogni colonna successiva, diciamo la i -esima, contiene $\rho_i - \rho_{i-1}$ quadratini, di modo che la somma dei quadratini che compaiono nelle prime i colonne è esattamente i ;
- (c) si procede in tale modo sino a che non si sono scritte m colonne;
- (d) terminato il disegno della tabella è possibile numerare le caselle, procedendo per colonne da sinistra verso destra.

Ad esempio, se $m = 4$ e $\rho_1 = 6, \rho_2 = 10, \rho_3 = 12, \rho_4 = 13$ si ottiene:

1	7	11	13
2	8	12	
3	9		
4	10		
5			
6			

- 8. Ogni riga del diagramma di Young corrisponde ad un sottospazio ciclico nella decomposizione dell'autospazio generalizzato. In particolare, nel caso della tabella precedentemente introdotta vi sono 6 sottospazi ciclici, di periodi, nell'ordine, $(4, 3, 2, 2, 1, 1)$.
- 9. Questo ci basta per poter scrivere la forma canonica di Jordan della matrice T .
- 10. Per trovare dei generatori si può procedere in questo modo: si parta dalla casella sulla prima riga e m -esima colonna e si trovi un vettore $\mathbf{v}_1 \in \ker T^m \setminus \ker T^{m-1}$. Come sopra detto, questo vettore determinerà anche un generatore $T\mathbf{v}_1 \in \ker T^{m-1} \setminus \ker T^{m-2}$, un generatore $T^2\mathbf{v}_1 \in \ker T^{m-2} \setminus \ker T^{m-3}$ e così via.
- 11. Terminata la prima riga, si proceda in modo analogo per le successive: in particolare si trovi la casella libera piú in alto a sinistra (supponiamo che sia nella i esima riga e j esima colonna); si scelga un vettore $\mathbf{v}_i \in \ker T^j \setminus \ker T^i$ che sia linearmente indipendente rispetto tutti i vettori selezionati in precedenza, e si riempiano le caselle a sinistra di quella

selezionata con vettori del tipo $T^k \mathbf{v}_i$. In particolare, la tabella di cui sopra diviene:

$T^3 \mathbf{v}_1$	$T^2 \mathbf{v}_1$	$T \mathbf{v}_1$	\mathbf{v}_1
$T^2 \mathbf{v}_2$	$T \mathbf{v}_2$	\mathbf{v}_2	
$T \mathbf{v}_3$	\mathbf{v}_3		
$T \mathbf{v}_4$	\mathbf{v}_4		
\mathbf{v}_5			
\mathbf{v}_6			

Osserviamo che una base per l'autospazio di T associato all'autovalore 0 (in altre parole il $\ker T$) è

$$\{T^3 \mathbf{v}_1, T^2 \mathbf{v}_2, T \mathbf{v}_3, T \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}.$$

Esempio 1. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -9 & -1 & 5 & 47 & 31 & -84 & -362 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -10 & 31 & 143 & 84 & -133 & -488 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & -3 & -21 & -13 & 24 & 94 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -8 & -42 & -24 & 38 & 138 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 21 & 12 & -24 & -94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -17 & -10 & 21 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -7 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di M è

$$(x - 2)^2(x - 1)^8$$

Questo significa che M ammette 2 autovalori. Il rango di $M - I$ è 7; questo significa che l'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 ha dimensione 3; il rango di $M - 2I$ è 9, per cui la dimensione di V_2 è 1. Gli autospazi generalizzati hanno invece rispettivamente dimensione pari alla molteplicità algebrica degli autovalori, per cui $\dim E_1 = 8$ e $\dim E_2 = 2$. La matrice M pertanto è simile ad una matrice diagonale a blocchi della forma

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right)$$

ove M_1 è una matrice 8×8 , mentre M_2 è una matrice 2×2 . Procediamo al calcolo delle dimensioni dei nuclei. Studiamo $T_1 = M - I$. Sappiamo già che $\rho_1(T_1) = 3$. Ristretta allo spazio E_1 , l'applicazione lineare indotta da T_1 è nilpotente, per cui possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \dim \ker T_1^2 = 10 - 5 = 5, \\ \rho_3 &= \dim \ker T_1^3 = 10 - 3 = 7, \\ \rho_4 &= \dim \ker T_1^4 = 10 - 2 = 8, \\ \rho_5 &= \dim \ker T_1^5 = 10 - 2 = 8.\end{aligned}$$

Osserviamo che 8, in particolare è proprio la dimensione di E_1 . Pertanto, $m = 4$ e possiamo disegnare il diagramma:

1	4	6	8
2	5	7	
3			

Quindi, tenuto conto che $J_1(1) = 1$, M_1 si scrive in blocchi di Jordan come

$$M_1 = \begin{pmatrix} J_4(1) & & & \\ & J_3(1) & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Per il blocco M_2 , associato ad E_2 , si procede in modo analogo e, posto $T_2 = M - 2I$, si ottiene

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \dim \ker T_2 = 10 - 9 = 1, \\ \rho_2 &= \dim \ker T_2^2 = 10 - 8 = 2, \\ \rho_3 &= \dim \ker T_2^3 = 10 - 8 = 2,\end{aligned}$$

per cui, in questo caso $m = 2$ e il diagramma risulta

1	2
---	---

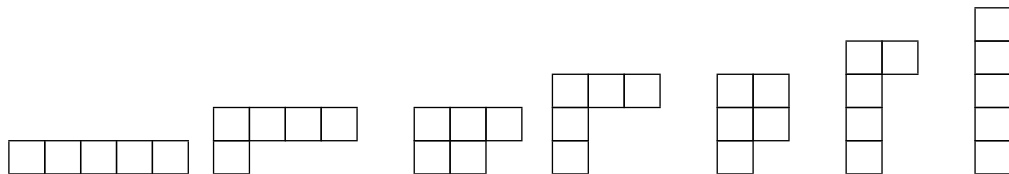
Da quanto sopra scritto si deduce $M_2 = J_2(2)$. Riassumendo, la matrice M è simile ad una matrice M' della forma

$$M' = \begin{pmatrix} J_4(1) & & & & \\ & J_3(1) & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & J_2(2) \end{pmatrix},$$

ovvero, più esplicitamente,

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 2. Supponiamo che si vogliano classificare, a meno di coniugio, tutti gli endomorfismi di \mathbb{C}^5 che hanno polinomio caratteristico $(x - 1)^5$. Questo corrisponde ad enumerare tutte le possibili decomposizioni in blocchi di Jordan di una matrice 5×5 con unico autovalore 1. Per conseguire questo obiettivo basta elencare tutti i diagrammi di Young con 5 caselle. Essi sono:



In particolare, vediamo che, a meno di coniugio, esiste un unico endomorfismo col polinomio caratteristico assegnato e tale che 1 abbia molteplicità geometrica 1, 4 oppure 5. Quando 1 ha molteplicità geometrica 2 o 3, invece esistono due classi di coniugio che non sono equivalenti.

A margine, osserviamo che il numero di blocchi di Young corrisponde al numero di modi distinti in cui è possibile scrivere 5 come somma di interi maggiori di 0:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 1, \quad 3 + 1 + 1, \quad 3 + 2, \quad 4 + 1, \quad 5.$$

Esempio 3. Sia $M \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ una matrice 2×2 ad entrate sul campo complesso \mathbb{C} . Vogliamo calcolare tutte le potenze intere positive di M . Distinguiamo due possibilità:

1. M è diagonalizzabile; allora, esiste una matrice diagonalizzante $P \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ tale che

$$D = P^{-1}MP,$$

ove D è una matrice diagonale, diciamo $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$. Conseguentemente,

$$M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 \\ 0 & d_{22}^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. M non è diagonalizzabile; in questo caso il polinomio caratteristico di M è necessariamente della forma

$$P_M(x) = (x - \lambda)^2,$$

con λ autovalore di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Per quanto visto sopra, esiste una matrice $Q \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che

$$J_2(\lambda) = Q^{-1}MQ.$$

Conseguentemente,

$$M^k = QJ_2(\lambda)^kQ^{-1}.$$

Per ottenere una forma chiusa come quella presentata nel punto precedente abbiamo bisogno di calcolare $J_2(\lambda)^k$. Dimostriamo che

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Procediamo per induzione:

- per $k = 1$ la formula fornisce

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

per cui l'assunto è soddisfatto.

- supponiamo ora che la formula valga per $k - 1$ e dimostriamo che essa vale anche per k :

$$J_2(\lambda)^k = J_2(\lambda)^{k-1}J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{k-1} & 0 \\ (k-1)\lambda^{k-2} & \lambda^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

La tesi segue.

Pertanto,

$$M^k = Q \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} Q^{-1}.$$