Curve

20 novembre 2009

In questi appunti presenteremo alcuni elementi di base della teoria delle curve. Considereremo dapprima la nozione di curva algebrica piana e, in particolare, vedremo alcune proprietà delle coniche. In secondo luogo verranno introdotte alcune nozioni relative lo studio differenziale delle curve.

1 Curve algebriche piane

L'idea cardine della geometria analitica è quella di descrivere degli enti geometrici mediante equazioni. In generale, tali equazioni possono essere date da polinomi o meno. Poiché ragioneremo in termini di coordinate, supporremo che sia fissato un riferimento una volta per tutte e identificheremo i punti dei veri spazi in esame con le loro cooedinate.

Definizione 1. Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ un insieme di punti. Allora $\mathcal{C}$ è detto *algebrico* se esiste un insieme finito di polinomi $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ tale che

$$\mathcal{C} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K}) : f_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \text{ per ogni } i\ \}.$$

Rette, piani, iperpiani sono sempre insiemi algebrici. Osserviamo che i polinomi $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ non sono univocamente determinati.

Ci occuperemo ora di curve piane.

Definizione 2. Sia $f(x, y)$ un polinomio in due variabili. Si dice *curva algebrica affine* di equazione $f(x, y) = 0$ la coppia $(f, \mathcal{C})$ ove

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathrm{AG}(2, \mathbb{K}) : f(x, y) = 0\}.$$

La corrispondente *curva algebrica proiettiva* è data dalla coppia $(\widetilde{f}, \widetilde{\mathcal{C}})$ ove

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \{\mathbb{K}^\star(x_0, x_1, x_2) : \widetilde{f}(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Il grado del polinomio f (ovvero $\widetilde{f}$) che definisce una curva algebrica è detto *ordine della curva*.

L'ordine di una curva possiede un importante significato geometrico

Teorema 3 (Teorema dell'ordine)**.** *Una retta generica del piano interseca una curva piana d'ordine* n *in* n *punti.*

Dimostrazione. L'intersezione fra una curva $\mathcal{C}$ di equazione $f(x,y)=0$ ed una retta r di equazione $ax+by+c=0$ si può determinare risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ ax+by+c=0; \end{cases}$$

ricavando la y dalla seconda equazione, e sostitudendo nella prima si ottiene una espressione di grado n nella sola x

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

ove i coefficienti A_i dipendono dai parametri a, b, c che determinano la retta r. In particolare, tranne che per al più un numero finito di scelte per a e b si ha $A_0 \neq 0$; pertanto, in generale, l'espressione considerata ha n radici. □

Qualora si ragioni su di un campo algebricamente chiuso (ad esempio $\mathbb{C}$) si può dire di più.

Teorema 4. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo algebricamente chiuso. Ogni curva proiettiva di ordine* n *definita in* $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$ *è intersecata in esattamente* n *punti, contati con le debite molteplicità, da una retta che non sia completamente contenuta in essa.*

Dimostrazione. Utilizziamo il medesimo ragionamento applicato nella dimostrazione del Teorema 3, osservando che sostituendo la y nell'equazione della curva si ottiene un polinomio $p(x)$ per cui vigono le seguenti possibilità:

1. il polinomio $p(x)$ così ottenuto è identicamente nullo; pertanto, ogni punto della retta appartiene anche alla curva;

2. il polinomio $p(x)$ ha grado n; pertanto esso ha n radici in $\mathbb{K}$ contate con le debite molteplicità; tali radici corrispondono a n punti in $\mathrm{AG}(2,\mathbb{K})$ visto come piano immerso in $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$;

3. il polinomio $p(x)$ ha grado t con $0 \leq t < n$. Passando a coordinate omogenee si vede che l'equazione $p(x)=0$ diviene

   $$\widetilde{p}(x_0,x_2) = A_0x_0^n + A_1x_2x_0^{n-1} + \ldots + A_nx_2^n.$$

   Quando $A_0 = 0$, allora $\widetilde{p}(x_0,0)=0$ identicamente; pertanto la curva e la retta si intersecano su dei punti all'infinito e la molteplicità di intersezione è pari ad i ove A_i è il primo coefficiente non nullo di $\widetilde{p}$. Ne segue che le intersezioni, contate opportunamente, sono ancora n.

□

2 Retta tangente

Definizione 5. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proettiva di equazione $\widetilde{f}(x_0, x_{,}x_2) = 0$ e consideriamo $P \in \mathcal{C}$. Si dice *tangente* a $\mathcal{C}$ in P ogni retta $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ che abbia in $\mathcal{C}$ due intersezioni riunite.

Mostriamo ora come calcolare la retta tangente ad una curva $\mathcal{C}$ algebrica proiettiva.

Consideriamo dapprima il caso molto particolare in cui la curva $\mathcal{C}$ passa per il punto affine $O = (0, 0)$ e si voglia calcolare la tangente in tale punto.

Lemma 6. *Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica piana di equazione $f(X, Y) = 0$ e supponiamo $O = (0, 0) \in \mathcal{C}$. Allora la tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $O = (0, 0)$ ha equazione*

$$\frac{\partial f}{\partial} X\Big|_O X + \frac{\partial f}{\partial Y}\Big|_O Y = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} f(X, Y) = 0 \\ Y = \alpha X. \end{cases}$$

Sia r l'ordine di $\mathcal{C}$ e scriviamo

$$f(X, Y) = \sum_{i,j=0}^{r} a_{ij} X^i Y^j.$$

In particolare, la retta $Y = \alpha X$ ha una intersezione doppia con $f(X, Y)$ in $(0, 0)$ per tutti e soli i valori di α per cui il polinomio

$$f(X, \alpha X) = 0$$

ha una radice almeno doppia $X = 0$. Questo significa che 0 deve essere radice sia di $f(X, \alpha X)$ che di $f'(X, \alpha X) = \frac{df}{dX}$. Pertanto, $f'(X, \alpha X)$ non deve avere termini costanti, cioè

$$f_{10} + \alpha f_{01} = 0,$$

da cui, tenuto conto della scrittura di f,

$$\frac{\partial f}{\partial X}\Big|_{(0,0)} + \alpha \frac{\partial f}{\partial Y}\Big|_{(0,0)} = 0. \tag{1}$$

Se

$$\frac{\partial f}{\partial Y}\Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

tale equazione ammette una e una sola soluzione, corrispoedente alla retta

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_O Y + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_O X = 0; \tag{2}$$

se, invece

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_O = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_O \neq 0,$$

allora si mostra con ragionamento analogo che la retta $X = 0$, che ha ancora equazione (2) risulta tangente a $\mathcal{C}$. In particolare, la tangente esiste ed è unica ogni qual volta

$$\nabla|_{(0,0)} f = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_O, \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_O \right) \neq \mathbf{0}.$$

□

Definizione 7. Sia $f(X, Y) = 0$ l'equazione di una curva piana $\mathcal{C}$. Un punto $P \in \mathcal{C}$ è detto *singolare* se

$$\nabla|_P f = \mathbf{0}.$$

In particolare, l'equazione della tangente in O ad una curva di equazione $f(X, Y) = 0$ si scrive in forma compatta come

$$\langle \nabla|_O f, (X, Y) \rangle = 0.$$

Vogliamo ora studiare il calcolo della tangente ad un punto arbitrario di una curva algebrica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione omogenea $\widehat{f}(x_1, x_2, x_0) = 0$. Procederemo come segue:

1. mostreremo che, per ogni $P \in \mathcal{C}$, esiste sempre una opportuna trasformazione proiettiva A che manda $P \to O = (0, 0, 1)$;
2. useremo il Lemma 6 per calcolare la tangente in O;
3. vedremo come le derivate si trasformino applicando A^{-1}.

Lemma 8. *Sia* $\mathbb{K}^\star \mathbf{x} \in \mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$. *Allora, esiste una matrice* $A \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ *ortogonale*

$$A(\mathbb{K}^\star \mathbf{x}) = \mathbb{K}^\star (A\mathbf{x}) = \mathbb{K}^\star (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$. Chiaramente i punti $\mathbb{K}^\star \mathbf{x}$ e $\mathbb{K}^\star \mathbf{y}$ coincidono. In completiamo ora $\mathbf{y}$ a base ortonormale di $\mathbb{K}^{n+1}$ di modo da ottenere come base ordinata

$$\mathfrak{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_n}, \mathbf{y}\}.$$

La matrice cercata è l'inversa di quella B che ha come colonne le rappresentazioni dei vettori di $\mathfrak{B}$ rispetto la base canonica. □

Lemma 9. *Sia* $f(x_1, x_2, x_0) = 0$ *l'equazione di una curva* $\mathcal{C}$, *e* $A \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$. *Allora, l'insieme*

$$\mathcal{C}^A = \{AP : P \in \mathcal{C}\}$$

è una curva di equazione $f^A(x_1, x_2, x_0) = f(A^{-1}(x_1, x_2, x_0)) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $P = (p_0, p_1, p_2)$ soddisfi $g(p_1, p_2, p_0) = 0$. Poiché $A : \mathrm{PG}(2, \mathbb{K}) \to \mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$ è biettiva, esiste sicuramente un $Q \in \mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$ tale che $P = AQ$. Notiamo che

$$0 = f^A(P) = f^A(AQ) = f(A^{-1}AQ) = f(Q);$$

pertanto $P \in \mathcal{C}^A$. Viceversa, se $P \in \mathcal{C}^A$ allora esiste un $Q \in \mathcal{C}$ tale che $P = AQ$ e, chiaramente $f(Q) = 0$; in particolare

$$f^A(P) = f(A^{-1}P) = f(A^{-1}AQ) = f(Q) = 0,$$

per cui $f^A(Q) = 0$. □

Il lemma seguente, che richiamiamo senza dimostrazione, mostra come si trasformano le derivate.

Lemma 10. *Sia* A *una matrice* $n \times n$, *e* $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ *una funzione differenziabile. Poniamo* $g(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$. *Allora,*

$$\nabla|_{\mathbf{x}} g = A^T(\nabla|_{A\mathbf{x}} f). \tag{3}$$

In particolare, se $A = \alpha I$, e $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ è un polinomio omogeneo di grado r in $n+1$ variabili, dalla (3) si deduce

$$\alpha^r \nabla|_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \nabla|_{\mathbf{p}}(\alpha^r f(\mathbf{x})) = \nabla|_{\mathbf{p}} f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha \nabla|_{\alpha\mathbf{p}} f(\mathbf{x}),$$

da cui si ottiene

$$\nabla|_{\alpha\mathbf{p}} f = \alpha^{r-1} \nabla|_{\mathbf{p}} f. \tag{4}$$

Ponendo

$$\nabla_{\mathbb{K}^\star \mathbf{p}} f = \{\nabla|_{\alpha\mathbf{p}} f : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Per la (4), dunque possiamo scrivere

$$\nabla_{\mathbb{K}^\star \mathbf{p}} f \subseteq \mathbb{K}^\star \nabla_{\mathbf{p}} f. \tag{5}$$

Notiamo che i due insiemi nella (5) coincidono se, e solamente se il grado del polinomio omogeneo f è pari oppure $\nabla_{\mathbf{p}} f = \mathbf{0}$. In ogni caso, se $\nabla_{\mathbf{p}} f \neq \mathbf{0}$, però, esiste un'unica classe $\mathbb{K}^\star \mathbf{x}$ che contiene il gradiente.

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema principale.

Teorema 11. *Sia* $\mathcal{C}$ *una curva di equazione proiettiva* $\widehat{f}(x_1, x_2, x_0) = 0$. *Allora, per ogni* $P = (x_1, x_2, x_0) \in \mathcal{C}$ *con*

$$\nabla|_P\widehat{f} = \left(\left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_1}\right|_P, \left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_2}\right|_P, \left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_0}\right|_P \right) \neq (0, 0, 0)$$

esiste un unica tangente r_P *a* $\mathcal{C}$ *passante per* P *e tale retta ha equazione*

$$\left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_1}\right|_P x_1 + \left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_2}\right|_P x_2 + \left.\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_0}\right|_P x_0 = 0,$$

ovvero

$$\left\langle \nabla|_P\widehat{f}, (x_1, x_2, x_0) \right\rangle = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo $P = (p_1, p_2, p_0)$ e sia A una trasformazione ortogonale tale che $AP = \mathbb{K}^\star(0, 0, 1) = O$. Il punto $P \in \mathcal{C}$ corrisponde pertanto al punto $O \in \mathcal{C}^A$ mediante A e, per il Lemma 9, l'equazione di $\mathcal{C}^A$ è proprio $\widehat{f^A}(x_1, x_2, x_0) = 0$. Passiamo ora a coordinate affini, ponendo $X = \frac{x_1}{x_0}$ e $Y = \frac{x_2}{x_0}$. Usando il Lemma 6 si vede che la tangente in $(0, 0)$ alla curva $\mathcal{C}^A$ di equazione $f^A(X, Y) = 0$è

$$\langle \nabla|_{(0,0)} f^A, (X, Y) \rangle = 0.$$

Ripassando a coordinate proiettive e sfruttando le considerazioni in calce al Lemma 10 si vede che l'insieme

$$\mathbb{K}^\star\nabla|_{(0,0,1)}\widehat{f^A} = \mathbb{K}^\star \left(\left.\frac{\partial \widehat{f^A}}{\partial x_1}\right|_{(0,0,1)}, \left.\frac{\partial \widehat{f^A}}{\partial x_2}\right|_{(0,0,1)}, \left.\frac{\partial \widehat{f^A}}{\partial x_0}\right|_{(0,0,1)} \right)$$

dipende solamente dalla classe di $\mathbb{K}^\star(0, 0, 1)$. Quindi, la una tangente per $O = \mathbb{K}^\star(0, 0, 1)$ ha equazione proiettiva del tipo tipo

$$\left\langle \nabla|_{(0,0,1)}\widehat{f^A}, (x_1, x_2, x_0) \right\rangle = 0.$$

Sia $g = f^A$. Chiaramente $f = g^{A^{-1}}$. Usando il Lemma 10, la definizione di f^A e tenuto conto che $A^T = A^{-1}$, notiamo che

$$(\nabla|_O\widehat{f^A}) = A^{-T}(\nabla|_{A^{-1}O}\widehat{f}) = A(\nabla|_P\widehat{f})$$

Applicando ora la trasformazione A^{-1} che manda la curva $\mathcal{C}^A$ in $\mathcal{C}$ e, in particolare $O \to P$ si ottene per la tangente

$$\left\langle A(\nabla|_P\widehat{f}), A(x_1, x_2, x_0) \right\rangle = 0,$$

da cui

$$\left\langle A^T A(\nabla_P \widehat{f}), (x_1, x_2, x_0) \right\rangle = 0,$$

ovvero

$$\left\langle \nabla_P \widehat{f}, (x_1, x_2, x_0) \right\rangle = 0.$$

□

Definizione 12. Un punto $P \in \mathcal{C}$ è detto r–uplo se ogni retta passante per P incontra $\mathcal{C}$ in P con molteplicità almeno r.

3 Forme quadratiche

Definizione 13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2. Si dice *forma quadratica* ogni applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ tale che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 q(\mathbf{x})$;
2. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})$ è una forma bilineare $V \times V \to \mathbb{K}$.

In generale, se V è uno spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$ si può dimostrare che ogni forma quadratica q si rappresenta come

$$q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, Q\mathbf{x} \rangle ,$$

ove Q è una matrice simmetrica.

Quando lo spazio vettoriale V è reale, è sempre possibile supporre grazie al teorema spettrale che, a meno di un cambiamento di base, la matrice Q sia diagonale D. Inoltre, tenuto conto che $q(\alpha \mathbf{b}_i) = \alpha^2 q(\mathbf{b}_i)$ si riesce a dimostrare che, in una base opportuna è possibile supporre che le entrate λ_i sulla diagonale principale di D appartengano tutte all'insieme $\{+1, 0, -1\}$. Pertanto, a meno di cambiamenti di base, una forma quadratica risulta essere descritta da due parametri:

1. il rango della matrice D;
2. la *segnatura* di D, ovvero, il numero di entrate in D pari a $+1$.

Alternativamente è possibile descrivere la forma quadratica fornendo l'elenco dei segni degli autovalori della matrice Q; in particolare, una forma quadratica su di uno spazio di dimensione n è definita positiva se la sua segnatura è n come pure il suo rango; definita negativa se il rango è n e la segnatura 0.

4 Polarità

Consideriamo ora una forma quadratica q su V avente rango massimo, indotta da una matrice Q e indichiamo con b la forma bilineare ad essa associata. In generale, possiamo considerare la corrisponenza π che associa ad ogni vettore $\mathbf{a} \in V$ l'iperpiano di equazione

$$b(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\langle Q\mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Questa corrispondenza è un isomorfismo fra lo spazio vettoriale V e il suo duale V'.

Supponiamo ora che si abbia $\mathbf{x} \in \pi(\mathbf{a})$; allora

$$0 = \langle Q\mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, Q\mathbf{x} \rangle = \langle Q\mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle$$

da cui si deduce $\mathbf{a} \in \pi(\mathbf{x})$. Una corrispondenza fra V e il suo duale che goda di tale proprietà è detta *polarità*.

Osserviamo che matrici proporzionali inducono la medesima polarità.

5 Coniche

Definizione 14. Una curva piana di ordine 2 è detta *conica*.

L'equazione generica di una conica di $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ può sempre scriversi come

$$a x_0^2 + 2b x_0 x_1 + 2c x_0 x_2 + d x_1^2 + 2e x_1 x_2 + f x_2^2 = 0. \qquad (6)$$

Posto

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

si vede che la (6) è equivalente all'espressione

$$X^T Q X = 0. \qquad (7)$$

In particolare, data una conica si definisce in modo unico una polarità. Vale il seguente teorema.

Teorema 15. *Sia $\mathcal{C}$ una conica non singolare, e π la polarità ad essa associata. Consideriamo un punto $P \in \mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$, e sia $\pi(P)$ la sua retta polare. Ci sono tre possibilità:*

1. *$\pi(P)$ incontra la conica in un punto; allora $\pi(P) \cap \mathcal{C} = \{P\}$ e $\pi(P)$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ passante per P.*

2. *$\pi(P)$ incontra la conica in due punti distinti, diciamo L ed M. Allora, PL e PM sono le due rette tangenti alla conica $\mathcal{C}$ passanti per P; in tale caso si dice che P è un* punto esterno *a $\mathcal{C}$.*

3. *$\pi(P)$ non incontra la conica; in questo caso non esistono rette tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P; in tale caso P è detto* punto interno *a $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Sia $P \in \mathcal{C}$; un calcolo diretto mostra che la retta tangente passante per P ha proprio equazione

$$\langle X, QP \rangle = 0.$$

Ne segue che la polare di un punto della conica è la tangente per quel punto. Viceversa, se la polare $\pi(P)$ tocca la conica in esattamente un punto Q, allora essa è la retta tangente per Q e $\pi(P) = \pi(Q)$. Ne segue $P = Q$.

Supponiamo ora $P \notin \mathcal{C}$ e che $\pi(P) \cap \mathcal{C} = \{L, M\}$ con $L \neq M$. Per le proprietà delle polarità abbiamo $P \in \pi(L) \cap \pi(M)$, ma $\pi(L)$ è la tangente alla conica per L e $\pi(M)$ è la tangente per M. Ne segue che PL e PM sono rette tangenti a $\mathcal{C}$. Supponiamo ora che PR sia una retta tangente alla conica e che $R \in \mathcal{C}$. Allora $P \in \pi(R) = PR$, da cui $R \in \pi(P)$. Ne segue $R \in \pi(P) \cap \mathcal{C}$. In altre parole i punti di contatto fra $\pi(P)$ e $\mathcal{C}$ sono tutti e soli i punti di contatto fra le tangenti per P e $\mathcal{C}$. Se ne deduce che:

1. per P passano al più due rette tangenti a $\mathcal{C}$;

2. se $\pi(P) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, allora non esistono rette tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P.

□

Forniamo ora alcune ulteriori definizioni. Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere.

Definizione 16. Si dice *centro* di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria rispetto $\mathcal{C}$.

In particolare, il centro di $\mathcal{C}$ è un punto proprio se $\mathcal{C}$ è una iperbole o una ellisse (e in questo caso si parla di *coniche a centro*) mentre appartiene a $\mathcal{C}$ ed è un punto improprio se $\mathcal{C}$ è una parabola.

Definizione 17. Per ogni conica a centro $\mathcal{C}$, si dicono *asintoti* di $\mathcal{C}$ le tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti impropri.

Osserviamo che se $\mathcal{C}$ è una iperbole, allora tali tangenti sono reali; se $\mathcal{C}$ è una ellisse, risultano invece rette complesse coniugate.

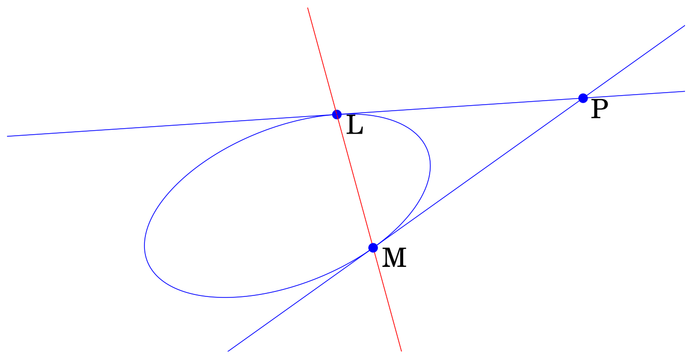

Figura 1: Polare di un punto esterno rispetto una conica

Definizione 18. Si chiamano *diametri* di una conica le rette polari dei punti impropri.

Notiamo che i diametri sono tutte e sole le rette passanti per il centro (proprio o improprio) di una conica.

Definizione 19. Si dice *asse* di una conica ogni diametro ortogonale al proprio polo (nel senso che la direzione dell'asse è ortogonale alla direzione individuata dal punto improprio che è il suo polo).

Teorema 20. *Sia $\mathcal{C}$ una conica non singolare; allora si verifica una delle seguenti tre possibilità:*

1. *$\mathcal{C}$ è una parabola; allora $\mathcal{C}$ ha un solo asse;*
2. *$\mathcal{C}$ è una circonferenza; allora ogni diametro di $\mathcal{C}$ è un asse;*
3. *$\mathcal{C}$ è una conica a centro diversa dalla circonferenza; allora $\mathcal{C}$ ha esattamente due assi, l'uno ortogonale all'altro.*

Definizione 21. Si dicono *vertici* di $\mathcal{C}$ le intersezioni proprie di $\mathcal{C}$ con i propri assi.

6 Classificazione proiettiva delle coniche

Osserviamo che ogni conica proiettiva corrisponde all'insieme dei sottospazi 1–dimensionali su cui una forma quadratica Q si annulla; in altre parole, $\mathbb{K}^\star \mathbf{x} \in \mathcal{C}$ se, e solamente se

$$\mathbb{K}^\star(Q\mathbf{x}) \subseteq (\mathbb{K}^\star \mathbf{x})^\perp.$$

Una proiettività di $\mathrm{PG}(2,\mathbb{R})$ corrisponde ad una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$; pertanto, coniche associate a forme lineari equivalenti su $\mathbb{R}^3$ sono sicuramente proiettivamente equivalenti. Osserviamo, d'altro canto, che se $q(\mathbf{x})$ è una forma quadratica di segnatura t su $\mathbb{R}^n$, allora $-q(\mathbf{x})$ avrà segnatura $n-t$. D'altro canto, si ha

$$q(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow -q(\mathbf{x}) = 0,$$

per cui queste due forme descrivono la medesima quadrica. In particolare, forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$ con segnatura opposta definiscono la medesima curva.

A partire dalle precedenti osservazioni possiamo formulare il seguente teorema.

Teorema 22. *Una conica reale, a meno di proiettività può corrispondere a*

1. *una forma quadratica di rango* 1*; in questo caso la conica assume equazione della forma*

   $$x_0^2 = 0$$

   e consta di una retta contata due volte;

2. *una forma quadratica di rango* 2 *e segnatura* 1*; in questo caso l'equazione della conica è della forma*

   $$x_0^2 + x_1^2 = 0$$

   ed essa consta di un punto reale, quello di coordinate $\mathbb{K}^*(0,0,1)$*;*

3. *una forma quadratica di rango* 2 *e segnatura* 2*; in questo caso l'equazione della conica diviene*

   $$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$$

   e la conica consta dell'unione di due rette reali e distinte;

4. *una forma quadratica di rango* 3 *e segnatura* 2*; in tale caso abbiamo una conica non singolare di equazione*

   $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0;$$

5. *una forma quadratica di rango* 3 *e segnatura* 3*; in questo ultimo caso, l'equazione proiettiva della conica è*

   $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

   che ammette come unica soluzione $(0,0,0)$*, non un punto di* $\mathrm{PG}(2,\mathbb{R})$*; pertanto la conica considerata è priva di punti reali.*

Definizione 23. Sia ℓ_∞ la retta all'infinito di $\mathrm{PG}(2,\mathbb{R})$. Una conica $\mathcal{C}$ è detta

1. *ellisse* se $\mathcal{C} \cap \ell_\infty = \emptyset$;
2. *parabola* se ℓ_∞ è tangente a $\mathcal{C}$;
3. *iperbole* se ℓ_∞ è secante $\mathcal{C}$.

7 Classificazione affine delle coniche

Teorema 24. *A meno di isometrie è sempre possibile ricondurre una conica non singolare di* $\mathrm{EG}(2,\mathbb{R})$ *ad una forma del tipo*

$$(1-e^2)x^2 - 2kx + y^2 + k^2 = 0. \tag{8}$$

Il parametro e è detto *eccentricità* della conica.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ una conica e Q la matrice simmetrica associata. Indichiamo con M il minore 2×2 di Q dato da

$$M = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Esiste allora una matrice A ortogonale 2×2 tale che $A^T M A$ sia diagonale. La trasformazione indotta da A consente di riscrivere l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in forma

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2q_{13}x + 2q_{23}y + q_{33} = 0. \tag{9}$$

A meno di uno scambio fra x e y possiamo sempre supporre $\lambda_2 \neq 0$. Moltiplicando eventualmente tutta l'equazione per -1 si riesce a garantire

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \leq 1.$$

Poniamo dunque

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (1-e^2),$$

di modo che l'equazione divenga

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2lx + 2my + n = 0 \tag{10}$$

ove l, m, n sono numeri reali. Se sostituiamo y con $y - m$, e x con $x - \tau$ l'equazione (10) diviene

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2(l-\tau)x + (n + m^2 + \tau^2) = 0. \tag{11}$$

A questo punto, è possibile scegliere τ di modo che

$$(l-\tau)^2 = (n + m^2 + \tau^2).$$

Si ricava $l^2 - 2\tau = n + m^2$, da cui

$$\tau = \frac{1}{2l}(l^2 - m^2 - n).$$

$\square$

Osserviamo che, in coordinate polari, ponendo

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

l'equazione si riscrive come

$$k^2 + 1 - e^2\rho^2\cos^2\theta - 2k\rho\cos\theta = 0. \tag{12}$$

Teorema 25. *Sia $\mathcal{C}$ una conica di eccentricità e. Allora $\mathcal{C}$ è*

1. *un'ellisse se $0 \le e < 1$;*
2. *una parabola se $e = 1$;*
3. *un'iperbole se $e > 1$.*

Dimostrazione. Scriviamo l'equazione omogenea associata alla (8):

$$(1-e^2)x_0^2 - 2kx_0x_2 + x_1^2 + k^2x_2^2 = 0. \tag{13}$$

Ponendo questa a sistema con l'equazione $x_2 = 0$ si ottiene

$$(1-e^2)x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

Questa ultima equazione

1. non ha soluzione non banale se $(1-e^2) > 0$, cioè $0 \le e < 1$;
2. ha soluzione $\mathbb{K}^\star(1,0,0)$ se $e = 1$;
3. ha due soluzioni indipendenti, $\mathbb{K}^\star(1, \sqrt{e^2-1}, 0)$ e $\mathbb{K}^\star(1, -\sqrt{e^2-1}, 0)$ se $e > 1$.

La tesi segue. $\square$

Teorema 26. *Sia* $\mathcal{C}$ *una conica. Allora esistono un punto* F *ed una retta* r *non passante per* F *tali che per ogni* $P \in \mathcal{C}$ *si abbia*

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e,$$

ove e *denota l'eccentricità di* $\mathcal{C}$. *Il punto* F *è detto* fuoco *di* $\mathcal{C}$, *mentre la retta* r *viene chiamata* direttrice.

Il teorema non asserisce l'unicità di fuoco e direttrice; in effetti, le parabole posseggono un unico fuoco e un'unica direttrice, mentre le ellissi e le iperbole, ne hanno, in generale, due.

Dimostrazione. Chiaramente, basta dimostrare il teorema per coniche nella forma (8). In particolare, supponiamo che il fuoco F sia un punto della forma $F = (x_f, 0)$, mentre che la direttrice r abbia equazione $x = x_r$. Il punto generico di $\mathcal{C}$ ha coordinate

$$P_t = (t, \pm\sqrt{(e^2 - 1)t^2 + 2kt - k^2}).$$

Pertanto

$$d(P_t, F)^2 = (x_f - t)^2 + (e^2 - 1)t^2 + 2kt - k^2 = x_f^2 - 2x_f t + e^2t^2 + 2kt - k^2$$

mentre

$$d(P_t, r)^2 = (x_r - t)^2 = x_r^2 - 2x_r t + t^2$$

Imponendo $d(P_t, F)^2 = e^2 d(P_t, r)^2$ si ottiene

$$x_f^2 - k^2 - e^2x_r^2 = 2(x_f - k - e^2x_r)t.$$

Se si vuole che la soluzione non dipenda da t, dobbiamo necessariamente avere $x_f - k - e^2x_r = 0$. Sotto questa ipotesi, abbiamo

$$(e^4 - e^2)x_r^2 + 2ke^2x_r - k^2 = 0.$$

Il discriminante di questa equazione è

$$k^2e^4 - k^2(e^4 - e^2) = k^2e^2 \geq 0,$$

per cui essa ha sempre soluzione ed è pertanto sempre possibile trovare almeno un fuoco e una direttrice della forma cercata. Osserviamo, per concludedere che $x_r \neq x_f$. □

In realtà è possibile adottare il Teorema 26 come definizione di conica non degenere. Infatti si dimostra che tutti e soli i luoghi geometrici che corrispondono a tale definizione sono descritti da equazioni di tale tipo.

Definizione 27. Una trasformazione affine

$$\psi(X) = AX + B$$

è detta *similitudine* se esiste un $\alpha > 0$ tale che, per ogni $X, Y \in AG(n, \mathbb{R})$ si abbia

$$d(\psi(X), \psi(Y)) = \alpha d(\psi(X), \psi(Y)).$$

In particolare, ogni similitudine preserva i *rapporti* fra distanze. Pertanto, vale il seguente teorema.

Teorema 28. *Coniche con la medesima eccentricità sono simili.*

Definizione 29. Una conica con eccentricità $e = 0$ è detta *circonferenza*.

8 Curve differenziabili

È possibile fornire una descrizione di una curva in termini parametrici.

Definizione 30. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (possibilmente improprio). Una *curva differenziabile parametrizzata* di classe C^k in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\alpha I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^k. L'insieme di tutti i punti

$$\{\alpha(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in I\}$$

è detto *traccia* di α.

Considereremo in generale curve di classe almeno C^3.

Data una curva $\alpha(t)$ possiamo scrivere tre funzioni $f_1(t), f_2(t)$ e $f_3(t)$ tali che

$$\alpha(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)).$$

Definizione 31. Si dice che due curve $\alpha : I \to \mathbb{R}$ e $\beta : J \to \mathbb{R}$ entrambe di classe C^k sono equivalenti se esiste una funzione $g : I \to J$ biiettiva, di classe C^k e con derivata mai nulla tale che

$$\alpha(t) = \beta(g(t)).$$

In questo caso si dice che α si ottiene da β mediante una una *riparametrizzazione*.

Curve equivalenti hanno la medesima traccia.

Definizione 32. Si dice *direzione tangente* ad α in $\alpha(t)$ lo spazio vettoriale generato dal vettore

$$\alpha'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)).$$

La retta tangente ad α nel punto $\alpha(t)$ è data dall'equazione vettoriale

$$\{\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è detta *regolare* se, per ogni $t \in I$ si ha $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. Nel seguito supporremo sempre che le curve considerate siano regolari.

In generale, se α e β sono due parametrizzazioni della medesima curva,

$$\alpha'(t) \neq \beta'(g(t)).$$

D'altro canto, vale il seguente teorema.

Teorema 33. *La direzione tangente ad una curva differenziabile in un punto non dipende dalla parametrizzazione adottata.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{d}{dt}\beta(g(t)) = g'(t)\beta'(g(t)).$$

La tesi segue dall'osservazione che $g'(t)$ è uno scalare sempre diverso da 0. □

In particolare, data una curva α regolare è sempre definito in ogni punto $\alpha(t)$ il *versore tangente*

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|_2}$$

e questo non dipende dalla scelta della parametrizzazione.

Definizione 34. Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}$ una curva e $t_0, t_1 \in I$ con $t_0 \leq t_1$. Si definisce *lunghezza* d'arco del segmento di curva di estremi $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$ l'integrale

$$L(\alpha, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|_2 dt.$$

La motivazione della Definizione 34 è la seguente. Una *partizione* di un intervallo $[a, b]$ è una $(k+1)$–upla $\mathcal{P} = (t_0, t_1, \ldots, t_k)$ con

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$$

Per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ poniamo

$$|\mathcal{P}| = \max_{0 \leq i \leq k-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

In generale, data una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $[a, b] \subseteq I$, possiamo considerare la funzione

$$M(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|_2.$$

Questa quantità, in generale dipende dalla partizione $\mathcal{P}$. La curva α è detta *rettificabile* se esiste il limite

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} M(\alpha, \mathcal{P}).$$

Se la curva è di classe C^1 tale limite esiste sicuramente e si ha

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} M(\alpha, \mathcal{P}) = \int_{t_0}^{t_k} \|\alpha'(t)\|_2 dt.$$

Teorema 35. *La lunghezza d'arco di un segmento di curva non dipende dalla parametrizzazione adottata.*

Dimostrazione. Siano α e β due parametrizzazioni equivalenti e supponiamo $\alpha(t) = \beta(g(t))$. Allora,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\beta'(g(t))\|_2 |g'(t)| dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} \|\beta'(\tau)\|_2 d\tau.$$

La tesi segue. □

In particolare, la lunghezza di un arco di curva è una proprietà di tipo geometrico.

Definizione 36. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è detta *parametrizzata rispetto la lunghezza d'arco* se, per ogni $t_0, t_1 \in I$ con $t_0 \leq t_1$ si ha

$$L(\alpha, t_0, t_1) = t_1 - t_0.$$

Teorema 37. *Per ogni curva esiste una parametrizzazione in lunghezza d'arco.*

Dimostrazione. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ la curva da considerare. Fissiamo un punto $t_0 \in I$ e consideriamo la funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(t)||_2 dt.$$

Osserviamo che $s'(t) = ||\alpha'(t)||_2 > 0$, per cui $s : I \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente di classe C^k con inversa di classe C^k. Poniamo

$$\beta(t) = \alpha(s^{-1}(t))$$

e osserviamo che β è equivalente ad α. Inoltre,

$$\beta'(t) = (s^{-1}(t))'\alpha'(s^{-1}(t)) = \frac{\alpha'(s^{-1}(t))}{||\alpha'(s^{-1}(t))||}.$$

Pertanto $||\beta'(t)||_2 = 1$ per ogni t. $\square$

Sia $\mathbf{t}(s)$ il versore tangente ad una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}$ nel punto $\alpha(s)$. Allora,

$$0 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle' = 2 \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle .$$

Ne segue che la derivata di $\mathbf{t}$ sarà un vettore

$$\kappa(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)$$

perpendicolare a $\mathbf{t}$, ove $\mathbf{n}$ indica il versore avente tale direzione e verso tale che $\kappa(s) \geq 0$.

Definizione 38. Il numero $\kappa(s) = ||\mathbf{t}'(s)||_2$ è detto *curvatura* di α in $\alpha(s)$. Il reciproco della curvatura, $R = 1/\kappa(s)$, è detto *raggio di curvatura*. Il versore

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{||\mathbf{t}'(s)||_2}$$

è detto *versore normale* ad α in $\alpha(s)$.

Osserviamo che se α è parametrizzata in lunghezza d'arco, allora

$$\kappa(s) = ||\alpha''(s)||_2.$$

La curvatura di una curva fornisce informazioni su quanto la curva in oggetto si discosta localmente da una retta.

Esempio 39.

1. Sia $\alpha(t) = (x_0 + l_0 t, y_0 + l_1 t, z_0 + l_2 t)$ una retta; allora, il versore tangente in qualsiasi punto di α è
$$\mathbf{t}(t) = \frac{(l_0, l_1, l_2)}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2 + l_2^2}},$$
e la curvatura risulta essere 0 ovunque;

2. Sia $r > 0$ e consideriamo la curva $\alpha : [0, 2\pi r[\to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r), z_0)$. Questa è una circonferenza parametrizzata in lunghezza d'arco; infatti
$$\alpha'(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0)$$
e $\|\alpha'(s)\| = 1$. La normale è
$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r), 0);$$
pertanto $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ e il raggio di curvatura risulta proprio essere r.

3. Consideriamo ora la curva $\alpha : [0, 2\sqrt{2}\pi r[\to \mathbb{R}^3$ data da
$$\alpha(s) = (r\cos\frac{s}{\sqrt{2}r}, r\sin\frac{s}{\sqrt{2}r}, \frac{1}{\sqrt{2}}s).$$
Anche questa curva è parametrizzata in lunghezza d'arco e
$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}r}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}r}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$
Passando al calcolo della normale si ottiene
$$\alpha''(s) = \frac{1}{2r}(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}r}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}r}, 0)$$
per cui la curvatura è pari a $\frac{1}{2r}$.

Notiamo che la curva 2 è un cerchio e risulta contenuto in un piano, la curva 3, invece, è una *elica circolare* e non lo è.

Definizione 40. Si dice *binormale* alla curva $\mathcal{C}$ il versore $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, ove $\wedge$ denota l'usuale prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Teorema 41. *Si ha*
$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{b}$ ha modulo costante, si ha

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle = 0.$$

Pertanto $\mathbf{b}'$ giace nel piano generato da $\mathbf{n}$ e $\mathbf{t}$. D'altro canto

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}',$$

tenuto conto del fatto che il prodotto vettoriale di vettori paralleli è $\mathbf{0}$. Se ne deduce che $\mathbf{b}'$ è perpendicolare anche a $\mathbf{t}$; esso risulta dunque parallelo a $\mathbf{n}$. □

Definizione 42. Il numero τ tale che

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$$

è detto *torsione* di α in $\alpha(s)$.

Osserviamo che se una curva è contenuta in un piano π di $\mathrm{EG}(3, \mathbb{R})$, allora il vettore $\mathbf{b}$ identifica proprio la direzione normale al piano stesso ed è costante. Ne segue che le curve piane hanno tutte torsione nulla.

Esempio 43. 1.

2.

Teorema 44 (Teorema fondamentale della teoria locale delle curve)**.** *Siano dati un intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *e due funzioni*

1. $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$ *di classe* C^{k+1} *con* $\kappa(s) > 0$ *per ogni* $s \in I$*;*
2. $\tau : I \to \mathbb{R}$ *di classe* C^k*.*

Allora, a meno di isometrie dirette di $\mathrm{EG}(3, \mathbb{R})$ *esiste un'unica curva* $\alpha : I \to \mathrm{EG}(3, \mathbb{R})$ *di classe* C^{k+3} *biregolare*[1]*, parametrizzata rispetto la lunghezza d'arco e avente curvatura* κ *e torsione* τ*.*

[1]Una curva è detta *biregolare* se la sua curvatura κ non è mai nulla