Spazi affini ed euclidei

12 novembre 2009

1 Spazi affini

Richiamiamo alcune nozioni sulla nozione di spazio affine

Definizione 1. Si dice *spazio affine* di dimensione n su di un campo $\mathbb{K}$ una terna $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K}) = (\mathcal{A}, V, \alpha)$ ove:

1. $\mathcal{A}$ è un insieme,
2. V è uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e
3. $\alpha : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ una applicazione tale che:
   (a) per ogni $P \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{v} \in V$ esiste un unico elemento $Q \in \mathcal{A}$ tale che
   $$\alpha(P, Q) = \mathbf{v};$$
   (b) assegnati $P, Q, R \in \mathcal{A}$ si ha
   $$\alpha(P, Q) + \alpha(Q, R) = \alpha(P, R).$$

In generale, con leggero abuso di notazione, scriveremo $P \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ per indicare un punto $P \in \mathcal{A}$.

Teorema 2. *Osserviamo che, per ogni* $P \in \mathcal{A}$ *fissato l'applicazione* α *induce una biiezione* $\alpha_P = \alpha(P, \cdot) : \mathcal{A} \to V$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} \in V$. Per definizione di spazio affine esiste un punto $X \in \mathcal{A}$ tale che $\alpha(P, X) = \alpha_P(X) = \mathbf{v}$; pertanto X è una preimmagine di $\mathbf{v}$ e l'applicazione $\alpha_P : \mathcal{A} \to V$ è suriettiva. D'altro canto, se esistessero $X, Y \in \mathcal{A}$ tali che $\alpha_P(X) = \alpha_P(Y) = \mathbf{v}$, allora avremmo

$$\alpha(P, X) = \alpha_p(X) = \mathbf{v} = \alpha_P(Y) = \alpha(P, Y),$$

da cui $X = Y$, per definizione di α. Pertanto α_P è anche iniettiva. $\square$

Teorema 3. *Per ogni coppia di punti* $P, Q \in \mathcal{A}$ *si ha*

$$\alpha(P, Q) = -\alpha(Q, P), \qquad \alpha(P, P) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che

$$\alpha(P, P) = \alpha(P, P) + \alpha(P, P).$$

Pertanto $\alpha(P, P) = \mathbf{0}$. D'altro canto

$$\alpha(P, Q) + \alpha(Q, P) = \alpha(P, P),$$

da cui segue $\alpha(P, Q) = -\alpha(Q, P)$. □

Definizione 4. Sia $P \in \mathcal{A}$ un punto e $\mathbf{t} \in V$. L'unico punto $Q \in \mathcal{A}$ tale che

$$\alpha(P, Q) = \mathbf{t}$$

è detto *traslato* di P secondo il vettore $\mathbf{t}$ e si scrive come

$$Q = P + \mathbf{t}. \tag{1}$$

Si noti che la funzione sopra definita è una applicazione $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ e *non* è una operazione in $\mathcal{A}$. Osserviamo che, in termini di vettori la (1) può riscriversi per ogni fissato $O \in \mathcal{A}$ come

$$\alpha(O, Q) = \alpha(O, P) + \alpha(P, Q) = \alpha(O, P) + \mathbf{t}, \tag{2}$$

e in questo caso la somma è effettivamente quella dello spazio vettoriale V.

Definizione 5. Si dice *punto medio* fra due punti P, Q ogni punto R tale che

$$\alpha(P, R) = \alpha(R, Q).$$

Teorema 6. *Il punto medio di due punti, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Osserviamo che se esiste almeno un punto R con le proprietà richieste, da $\alpha(P, R) + \alpha(R, Q) = \alpha(P, Q)$ si deduce $2\alpha(P, R) = \alpha(P, Q)$. Pertanto,

$$R = P + \frac{1}{2}\alpha(P, Q),$$

e, chiaramente, tale punto è unico. □

Osserviamo che se la nostra geometria è definita su di un campo *di caratteristica* 2, ovvero un campo $\mathbb{K}$ in cui per ogni $x \in \mathbb{K}$,

$$x + x = 0,$$

allora il punto medio di P e Q non esiste. In tutti gli altri casi la costruzione è applicabile.

Definizione 7. Si dice *sottospazio affine* di $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ ogni insieme $\mathcal{B}$ tale che l'immagine di α ristretta a $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ sia un sottospazio vettoriale W di V. In particolare, W sarà detto *giacitura* di $\mathcal{B}$, mentre la *dimensione* di $\mathcal{B}$ è definita come

$$\dim \mathcal{B} = \dim W.$$

Il seguente teorema è conseguenza immediata della definizione fornita.

Teorema 8. *Sia $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio affine, e $\mathcal{B}$ un suo sottospazio. Allora $(\mathcal{B}, W, \alpha')$ ove α' è la restrizione di α a $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ e W è l'immagine di α' è anche esso uno spazio affine.*

Definizione 9. Uno sottospazio affine di $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ di dimensione

1. 1 è detto retta;
2. 2 è detto piano;
3. 3 è detto solido;
4. $\dim \mathcal{A} - 1$ è detto iperpiano.

Teorema 10. *Sia $P \in \mathcal{A}$ e $W \leq V$. Allora, esiste un unico sottospazio affine $\mathcal{B}$ passante per P e avente giacitura W. Tale spazio è detto* spazio per P parallelo a W.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B} = \{Q \in \mathcal{A} : \alpha(P, Q) \in W\}. \tag{3}$$

Poiché $\mathbf{0} \in W$, si ha $P \in \mathcal{B}$. D'altro canto $Q, R \in \mathcal{B}$ implica

$$\alpha(Q, R) = \alpha(Q, P) + \alpha(P, R) = \alpha(P, R) - \alpha(P, Q),$$

per cui la restrizione di α a $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ è un sottospazio di W. Dall'esistenza, $\forall \mathbf{w} \in W$ di $Q \in \mathcal{A}$ tale che $\alpha(P, Q) = \mathbf{w}$ segue che la giacitura di $\mathcal{B}$ è effettivamente tutto W. L'esistenza del sottospazio richiesto dal teorema segue.

Se vi fossero due sottospazi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ per P con $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$, potremmo supporre senza perdere in generalità che $\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{B}'$. Pertanto, vi sarebbe almeno un punto $Q \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$. Poiché $Q \in \mathcal{B}$, $\mathbf{v} = \alpha(P, Q) \in W$; d'altro canto, per ogni vettore assegnato $\mathbf{v} \in W$ esiste esattamente un punto Q' in V tale che

$$\alpha(P, Q') = \mathbf{v}.$$

Dal fatto che la giacitura di $\mathcal{B}'$ è W segue che $Q' \in W$, contro l'ipotesi. Ne deduciamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. □

Osserviamo che l'applicazione α che compare nella (3) è quella definita su *tutto* lo spazio $AG(n, \mathbb{K})$; essa non è quella che dota $\mathcal{B}$ uno spazio affine, in quanto α_P per $P \in \mathcal{B}$ non è in generale una biiezione $\mathcal{B} \to V$. In effetti, si dimostra che l'immagine di $\alpha' = \alpha|_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$ è proprio W.

Teorema 11. *Per due punti distinti* P, Q *di uno spazio affine* $\mathcal{A}$ *passa una ed una sola retta.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una retta passante per P e per Q e indichiamo con W la sua giacitura. Osserviamo che $\alpha(P, Q) \in W$, per definizione di sottospazio affine. Inoltre $\alpha(P, Q) \neq \mathbf{0}$. Poiché W ha dimensione 1, ne segue che $\alpha(P, Q)$ è un generatore di W. L'unicità della retta segue dal teorema 10. □

Definizione 12. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ due sottospazi affini di $\mathcal{A}$ di giaciture rispettivamente B e C. Si dice che $\mathcal{B}$ è parallelo a $\mathcal{C}$ (in simboli $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$) se

$$B \subseteq C \text{ oppure } C \subseteq B$$

Conseguenza immediata della definizione e del Teorema 10 è il seguente risultato.

Teorema 13. *Sia* r *una retta di* $(\mathcal{A}, V, \alpha)$. *Per ogni* $P \in \mathcal{A}$ *esiste un'unica retta* s *tale che* $P \in s$ *e* $r \parallel s$.

Lemma 14. *Siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *due sottospazi affini di giaciture rispettivamente* X *e* Y *e supponiamo* $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. *Se* $X \subseteq Y$, *allora* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$.

Dimostrazione. Fissiamo $P \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Allora,

$$\mathcal{B} = \{Q : \alpha(P, Q) \in X\} \subseteq \{Q : \alpha(P, Q) \in Y\} = \mathcal{C}.$$

La tesi segue. □

Definizione 15. Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$. Si dice *chiusura affine* $\overline{\mathcal{P}}$ dell'insieme $\mathcal{P}$ il più piccolo sottospazio affine contenente $\mathcal{P}$.

Teorema 16. *Sia* $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_t\} \subseteq \mathcal{A}$ *e poniamo per* $1 \leq i \leq t$

$$\mathbf{p}_i = \alpha(P_0, P_i).$$

Allora, per ogni $0 \leq j \leq t$,

$$\overline{\mathcal{P}} = \{Q : \alpha(P_j, Q) \in \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_t \rangle\}.$$

Dimostrazione. Sia W la giacitura di $\overline{\mathcal{P}}$. Poniamo $\hat{W} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_t \rangle$. Sia ora $\mathcal{D}$ lo spazio affine passante per P_0 e avente giacitura $\hat{W}$. Poiché $\mathbf{p}_i \in \hat{W}$, abbiamo $P_i \in \mathcal{D}$ per ogni i. Conseguentemente,

$$\overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{D}.$$

Osserviamo che, poiché fatto $P_i \in \overline{\mathcal{P}}$ segue

$$\mathbf{p}_i = \alpha(P_0, P_i) \in W.$$

Pertanto $\hat{W} \subseteq W$. Dal fatto che $P_0 \in \mathcal{D} \cap \overline{\mathcal{P}}$ e dal Lemma 14 si deduce

$$\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathcal{P}}.$$

Incidentalmente, osserviamo che $\overline{\mathcal{P}}$ coincide con lo spazio passante per un qualsiasi suo punto e avente giacitura $\hat{W}$; pertanto la tesi discende dal Teorema 10. □

Definizione 17. Un insieme $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_t\} \subseteq \mathcal{A}$ è detto *indipendente* se $\dim \overline{\mathcal{P}} = t$. Alternativamente, si dice che in questo caso i punti sono *in posizione generale* (rispetto i sottospazi affini).

È facile dimostrare il seguente teorema, che caratterizza la nozione di dimensione affine.

Teorema 18. *Un sottospazio affine* $\mathcal{B}$ *ha dimensione* t *se, e solamente se, esso contiene sottoinsiemi di* $t + 1$ *punti indipendenti ma nessun sottoinsieme di* $t + 2$ *punti indipendenti. In particolare,* $\mathcal{B}$ *è generato da ogni suo sottoinsieme di* $t + 1$ *punti indipendenti.*

2 Riferimenti affini

Definizione 19. Si dice *riferimento affine* per lo spazio affine $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ una coppia ordinata $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ ove $O \in \mathcal{A}$ e $\mathfrak{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ è una base ordinata di V.

Siano $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio affine e $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ un suo riferimento.

Definizione 20. Sia $P \in \mathcal{A}$. Si dicono *coordinata affine* di P rispetto Γ la n–upla

$$(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

delle componenti del vettore $\alpha(O, P)$ rispetto la base $\mathfrak{B}$.

Osserviamo che, in generale, $\alpha(O, P) = -\alpha(P, O)$; pertanto, da

$$\alpha(O, P) = \sum_{i=1}^{n} p^i \mathbf{b}_i, \qquad \alpha(O, Q) = \sum_{i=1}^{n} q^i \mathbf{b}_i$$

segue

$$\alpha(P, Q) = \alpha(P, O) + \alpha(O, Q) = \sum_{i=1}^{n} (q^i - p^i)\mathbf{b}_i.$$

Consideriamo ora un sottospazio $W < V$ e un punto $P \in \mathcal{A}$. Sia

$$\mathfrak{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_t\}$$

una base di W. Consideriamo il sottospazio affine $\mathcal{W}$ passante per P e avente giacitura W. Per ogni punto $Q \in \mathcal{W}$ si ha

$$\alpha(P, Q) = \alpha(P, O) + \alpha(O, Q) \in W.$$

Pertanto, per ogni Q esiste $\mathbf{t} \in W$ tale che

$$\alpha(O, Q) = \alpha(O, P) + \mathbf{t}.$$

con $\mathbf{t} \in W$, ovvero

$$\alpha(O, Q) = \alpha(O, P) + \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \mathbf{w}_i$$

con $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Pertanto i punti in $\mathcal{W}$ sono tutti traslati di P secondo vettori in W; viceversa, osserviamo che per ogni $\mathbf{t} \in W$ esiste un unico punto Q tale che

$$\alpha(P, Q) = \alpha(P, O) + \alpha(O, Q) = \mathbf{t}.$$

Poiché la giacitura di $\mathcal{W}$ è W, ne segue che $Q \in \mathcal{W}$. Abbiamo dunque dimostrato il seguente teorema.

Teorema 21. *Lo spazio affine passante per P e parallelo a W è l'insieme di tutti i traslati di P secondo i vettori di W.*

Nel seguito denoteremo il vettore $\alpha(P, Q)$ con il simbolo $Q - P$. Osserviamo che

$$\alpha(P, Q) + \alpha(Q, R) = (Q - P) + (R - Q) = (R - P) = \alpha(P, R).$$

Indicheremo inoltre l'unico punto Q tale che $\alpha(P, Q) = \mathbf{v}$ come

$$Q = P + \mathbf{v}.$$

Supponiamo ora che

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\mathbf{b}_j$$

e che P abbia coordinate $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Allora, il generico punto $Q \in \mathcal{W}$ è del tipo

$$(q^1, q^2, \dots, q^n) = (p^1, p^2, \dots, p^n) + \sum_{j=1}^{t} \alpha_j(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj}),$$

ovvero

$$\begin{cases} q^1 = p^1 + \alpha_1 w_{11} + \ldots + \alpha_t w_{1t} \\ q^2 = p^2 + \alpha_1 w_{21} + \ldots + \alpha_t w_{2t} \\ \vdots \\ q^n = p^n + \alpha_1 w_{n1} + \ldots + \alpha_t w_{nt} \end{cases} \tag{4}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Osserviamo che dati dei punti $P_0, P_1, \dots, P_t$, le equazioni del sottospazio affine che essi generano si ottengono come base dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo in α_i e β

$$\begin{cases} \alpha_1 p_0^0 + \alpha_2 p_0^1 + \ldots + \alpha_n p_0^n + \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 p_1^0 + \alpha_2 p_1^1 + \ldots + \alpha_n p_1^n + \alpha_0 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 p_t^0 + \alpha_2 p_t^1 + \ldots + \alpha_n p_t^n + \alpha_0 = 0 \end{cases}.$$

In particolare, i punti $P_0, P_1, \dots, P_t$ sono indipendenti se, e solamente se, tale spazio vettoriale ha dimensione $n - t$. In altre parole, i $t + 1$ assegnati corrispondono a $t + 1$ condizioni lineari omogenee sullo spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ di tutte le equazioni in $n + 1$ incognite α_i sul campo $\mathbb{K}$. *I punti sono indipendenti se, e solamente se, tali condizioni sono linearmente indipendenti.*

Esempio 22. Consideriamo lo spazio affine $AG(4, \mathbb{R})$ e supponiamo che si vogliano determinare le equazioni del sottospazio $\mathcal{B}$ passante per i punti

$$P_0 = (2, 2, 0, 0)^T \qquad P_1 = (0, -2, 2, 0)^T$$
$$P_2 = (1, 0, 1, 0)^T \qquad P_3 = (2, 1, -1, 1)^T.$$

Per quanto visto prima, dobbiamo studiare il sistema

$$A\xi = 0 \tag{5}$$

ove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene che una base per lo spazio delle soluzioni di (5) è data dall'insieme

$$\{(-1, 1, 1, 2, 0), (-3, 1, -1, 0, 4)\}.$$

Tale insieme corrisponde ad un insieme di generatori per l'annullatore dell'insieme $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$. Questo significa che le equazioni del sottospazio $\mathcal{B}$ saranno

$$\begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ -3x + y - z = -4 \end{cases}$$

Osserviamo che i 4 punti assegnati non sono indipendenti, in quanto $\dim \mathcal{B} = 4 - 2 = 2$. Avremmo potuto notare quest'ultimo fatto anche scrivendo $\mathcal{B}$ in forma parametrica come nella (4). Infatti il punto generico di $\mathcal{B}$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P_0 + \beta_1(P_1 - P_0) + \beta_2(P_2 - P_0) + \beta_3(P_3 - P_0) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \beta_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \beta_3 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (2\beta_1 + \beta_2) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, i punti di $\mathcal{B}$ dipendono da solamente 2 parametri indipendenti e, conseguentemente, la dimensione della giacitura risulta essere proprio 2.

Osserviamo che, nel caso affine, non vi è simmetria fra lo spazio delle condizioni lineari (che ha dimensione $n+1$) e lo spazio vettoriale soggiacente AG$(n, \mathbb{K})$ (che ha dimensione n). Vedremo in seguito come ovviare a questo inconveniente.

Prima di concludere il presente paragrafo, osserviamo che se le equazioni di un sottospazio affine $\mathcal{B}$ sono quelle del sistema lineare (matriciale)

$$AX = B, \tag{6}$$

allora i vettori $\mathbf{w}$ nella giacitura W di $\mathcal{B}$ sono tutti e soli quelli che soddisfano il sistema lineare omogeneo associato

$$AX = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Infatti, se P, Q sono due punti di $\mathcal{B}$ (in coordinate), allora $AP = B$ e $AQ = B$; pertanto, posto $P - Q = \alpha(P, Q)$, si ha $A(P - Q) = 0$. Viceversa, se P è un punto di $\mathcal{B}$ e $\mathbf{v}$ un vettore tale che $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, si ottiene

$$A(P + \mathbf{v}) = AP + A\mathbf{v} = AP = B,$$

da cui $P + \mathbf{v} \in \mathcal{B}$. Osserviamo comunque che vi è una differenza fondamentale fra l'equazione (6) e l'equazione (7): la prima, infatti, lega fra loro le coordinate di punti di $\mathcal{B}$; la seconda consente di determinare le componenti di vettori di W, ove W è la giacitura di $\mathcal{B}$ stesso.

3 Cambiamenti di riferimento affine

Siano $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ e $\Gamma' = (O', \mathfrak{B}')$ due riferimenti affini per il medesimo spazio AG$(n, \mathbb{K})$. Sia $P \in$ AG$(n, \mathbb{K})$. Indichiamo con $\hat{P}$ il vettore colonna delle coordinate di P rispetto Γ e con $\tilde{P}$ il vettore colonna delle coordinate di P rispetto Γ'. Osserviamo innanzi tutto che per ogni $P \in$ AG$(n, \mathbb{K})$ si ha

$$\alpha(O', P) = \alpha(O', O) + \alpha(O, P) = \alpha(O, P) - \alpha(O, O').$$

Pertanto, chiamata T la matrice di cambiamento di base che ha per colonne i vettori della base $\mathfrak{B}'$ scritti come colonne rispetto la base $\mathfrak{B}$ si ha

$$\tilde{P} = T^{-1}(\alpha(O', P)) = T^{-1}(\alpha(O, P) - \alpha(O, O')) = T^{-1}\hat{P} - T^{-1}\hat{O}'$$

Ove con $\hat{O}'$ si sono indicate le coordinate di O' rispetto il riferimento Γ.

In pratica, ogni cambiamento di riferimento affine ha la forma

$$\tilde{P} = A\hat{P} + B$$

ove $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$ e B è un vettore colonna di $\mathbb{K}^n$, contenente le coordinate della vecchia origine O rispetto il nuovo riferimento Γ'.

4 Affinità

Definizione 23. Sia $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio affine Ogni trasformazione $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che

$$\alpha(\phi(P), \phi(Q)) = \hat{\phi}(\alpha(P, Q))$$

ove $\hat{\phi}$ è una trasformazione lineare $V \to V$ è detta *affinità* di $(\mathcal{A}, V, \alpha)$.

In generale, l'immagine di una affinità ϕ è un sottospazio $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$. Chiaramente, se $\hat{\phi}$ è invertibile, allora ϕ è una biezione.

Teorema 24. *Sia $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un'affinità e supponiamo che*

$$\mathcal{B} = \{P + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in W\}$$

sia un sottospazio affine di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$. *Allora*

$$\phi(\mathcal{B}) = \{\phi(P) + \mathbf{w}' : \mathbf{w}' \in \hat{\phi}(W)\}.$$

Dimostrazione. Sia $Q \in \mathcal{B}$; chiaramente $\phi(Q) \in \phi(\mathcal{B})$. Poiché $\phi(P) \in \phi(\mathcal{B})$, abbiamo che

$$\alpha(\phi(P), \phi(Q)) = \hat{\phi}(\alpha(P, Q))$$

appartiene alla giacitura di $\phi(\mathcal{B})$; pertanto $\phi(W) \subseteq W'$, ove W' è la giacitura di $\phi(\mathcal{B})$. Sia ora $\mathbf{w}' \in W'$. Allora il punto

$$Q' = \phi(P) + \mathbf{w}'$$

appartiene a $\phi(\mathcal{B})$ e, conseguentemente, esiste un $Q \in \mathcal{B}$ tale che $\phi(Q) = Q'$. Pertanto,

$$\mathbf{w} = \alpha(\phi(P), \phi(Q)) = \hat{\phi}(\alpha(P, Q)),$$

da cui si deduce $W' \subseteq \phi(W)$. In particolare $\phi(\mathcal{B})$ è lo spazio passante per $\phi(P)$ e parallelo a $\phi(W)$. La tesi discende ora dal Teorema 10. $\square$

Teorema 25. *Sia ϕ una affinità di $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ e supponiamo che sia assegnato un riferimento affine Γ. Allora, posto $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ si ha in coordinate*

$$\phi(X) = AX + B$$

ove $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ è un vettore che dipende solamente da ϕ.

Dimostrazione. Sia A la matrice di $\hat{\phi}$ e siano $X, Y \in \mathcal{A}$. Allora

$$\phi(Y) - \phi(X) = \hat{\phi}(Y - X) = AY - AX$$

da cui
$$\phi(X) = AX - AY + \phi(Y).$$
Posto $Y = O$ e $B = \phi(O)$
$$\phi(X) = AX + B.$$
□

Osserviamo che una affinità invertibile si scrive in componenti *rispetto un fissato riferimento* esattamente come un cambiamento di riferimento affine. I due concetti però devono essere tenuti distinti:

1. un cambiamento di riferimento non altera le proprietà geometriche, ma semplicemente il modo in cui le coordinate di un punto sono calcolate; in particolare, un cambiamento di riferimento è una trasformazione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (esso non agisce nemmeno sullo spazio vettoriale V sottostante la geometria affine in considerazione).

2. una affinità è una trasformazione $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che modifica i punti; incidentalmente, le coordinate risultano alterate.

Teorema 26. *Una affinità ϕ di* $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ *è univocamente determinata dalle immagini di* $n + 1$ *punti* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ *in posizione generale.*

Dimostrazione. Poiché i punti $P_0, \ldots, P_n$ sono in posizione generale, i vettori
$$\mathbf{b}_i = \alpha(P_0, P_i)$$
con $1 \leq i \leq n$ formano una base $\mathfrak{B}$ del sottospazio vettoriale V giacitura di $\mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$. Supponiamo esistano due affinità ϕ, ψ tali che
$$Q_i = \phi(P_i) = \psi(P_i).$$
Allora, in particolare
$$\hat{\phi}(\mathbf{b}_i) = \hat{\psi}(\mathbf{b}_i),$$
e dunque $\hat{\phi} = \hat{\psi}$. Sia ora $R \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e poniamo $\mathbf{r} = \alpha(P_0, R)$. Osserviamo che
$$\alpha(Q_0, \phi(R)) = \alpha(\phi(P_0), \phi(R)) = \hat{\phi}(\mathbf{r}) = \\ = \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \alpha(\psi(P_0), \psi(R)) = \alpha(Q_0, \psi(R));$$
pertanto, $\psi(R) = \phi(R)$ per ogni $R \in \mathrm{AG}(n, \mathbb{K})$ e, conseguentemente, $\phi = \psi$. □

5 Spazi euclidei

Definizione 27. Uno spazio affine $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ è detto *spazio metrico* se esiste una funzione $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $P, Q \in \mathcal{A}$:

1. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
2. $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0$ se, e solamente se, $P = Q$;
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Esempio 28. Sia $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio affine e supponiamo che Γ sia un suo fissato riferimento. La funzione $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ data da

$$d(P, Q) = |\{i : p_i \neq q_i\}|$$

è una distanza. Essa è detta *distanza di Hamming*.

Definizione 29. Si dice *spazio euclideo* ogni spazio affine $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ ove V è uno spazio vettoriale euclideo (i.e. dotato di prodotto interno).

Indicheremo in generale lo spazio euclideo di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ con il simbolo $\mathrm{EG}(n, \mathbb{K})$. Ci limiteremo in queste note a considerare i casi

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e il prodotto interno è un prodotto scalare;
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e il prodotto interno è un prodotto Hermitiano.

In generale, ogni punto di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ si può vedere come punto di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$; inoltre il prodotto Hermitiano di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$, ristretto a $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ è un prodotto scalare. Si dice pertanto che $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ è una *sottogeometria* di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$; viceversa, si dice che $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$ è la *complessificazione* di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$. Osserviamo comunque che $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ *non è* un sottospazio affine di $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$.

Il significato della nozione sopra introdotta è che assegnato un ente in $\mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ può aver senso vedere come tale oggetto si comporti nel momento in cui lo si consideri nel più grande ambiente fornito da $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$. Ad esempio, la curva reale di equazione

$$x^2 + y^2 = -1$$

non ha punti in $\mathrm{EG}(2, \mathbb{R})$, ma è studiabile in $\mathrm{EG}(2, \mathbb{C})$.

Definizione 30. Sia $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio euclideo, e siano $P, Q \in \mathcal{A}$. Si dice *distanza euclidea* di P da Q il numero reale positivo

$$d(P, Q) = \sqrt{\langle \alpha(P, Q), \alpha(P, Q) \rangle} = \|\alpha(P, Q)\|_2.$$

Per le proprietà della norma, la distanza euclidea soddisfa la Definizione 27. Pertanto, ogni spazio euclideo è effettivamente uno spazio metrico.

Osserviamo che sottospazi affini di uno spazio euclideo sono automaticamente spazi euclidei rispetto la struttura indotta.

Definizione 31. Sia $\mathcal{B}$ un sottospazio affine avente giacitura B e consideriamo $P \in \mathcal{A}$. Si dice *proiezione ortogonale di* P *su* $\mathcal{B}$ il punto $T \in \mathcal{B}$ tale che

$$\alpha(P, T) \in B^{\perp}.$$

Teorema 32. *La proiezione ortogonale di* P *su* $\mathcal{B}$ *è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due punti $T, T' \in \mathcal{B}$ tali che $\mathbf{t} = \alpha(P, T)$ e $\mathbf{t}' = \alpha(P, T')$ siano entrambi in $B^{\perp}$. Allora

$$\alpha(T, T') = \mathbf{t}' - \mathbf{t}.$$

Poiché $T, T' \in \mathcal{B}$, si ha $\alpha(T, T') \in B$. D'altro canto $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in B^{\perp}$, da cui $\alpha(T, T') \in B^{\perp}$. Segue $\alpha(T, T') = \mathbf{0}$, da cui $T = T'$. $\square$

In generale, scriveremo la proiezione di P su $\mathcal{B}$ con il simbolo $T = \Pi_{\mathcal{B}}(P)$.

Teorema 33 (Teorema di approssimazione)**.** *Sia* $P \in \mathcal{A}$. *Allora, per ogni* $B \in \mathcal{B}$ *si ha*

$$d(P, \Pi_{\mathcal{B}}(P)) \leq d(P, B).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema di approssimazione per la proiezione di vettori su spazi vettoriali. $\square$

Lemma 34. *Siano* $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{t}$ *due vettori di* V. *Allora, la proiezione ortogonale di* $\mathbf{t}$ *in direzione* $\mathbf{b}$ *è il vettore*

$$\Pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}.$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\left\langle \mathbf{t} - \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}, \mathbf{b} \right\rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle - ||\mathbf{b}||_2^2 \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{b}||_2^2} = 0.$$

$\square$

Sia $\mathcal{A}$ uno spazio euclideo e $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ un riferimento affine. Per ogni punto $P \in \mathcal{B}$ è possibile introdurre due diverse coordinate: possiamo infatti calcolare i coefficienti p^i tali che

$$\alpha(O, P) = \sum_i p^i \mathbf{b}_i$$

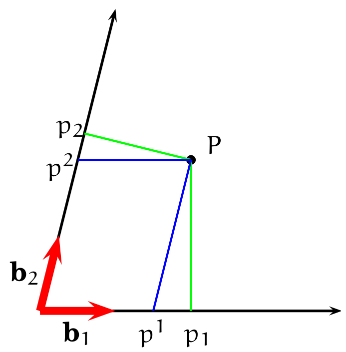

Figura 1: Coordinate covarianti e controvarianti

esattamente come nel caso puramente affine, oppure possiamo determinare i valori

$$p_i = \frac{\langle \alpha(O,P), \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle} = \frac{\langle \Pi_{\mathbf{b}_i}(\alpha(O,P)), \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|_2^2}$$

I valori p^i sono detti *coordinate controvarianti* del punto, mentre i p_i sono detti *coordinate covarianti*.

Teorema 35. *Siano* $P, Q \in \mathrm{EG}(n, \mathbb{K})$ *e supponiamo che per ogni* i *si abbia* $p_i = q_i$. *Allora,* $P = Q$.

Dimostrazione. Per ipotesi,

$$0 = p_i - q_i = \langle \alpha(O,P), \mathbf{b}_i \rangle - \langle \alpha(O,Q), \mathbf{b}_i \rangle = \langle \alpha(O,P) - \alpha(O,Q), \mathbf{b}_i \rangle .$$

Poniamo $\alpha(O,P) - \alpha(O,Q) = \mathbf{h}$. Osserviamo che per ogni $\mathbf{r} \in V$ si ha

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{r} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \langle \mathbf{h}, \mathbf{b}_i \rangle = 0$$

Da ciò si deduce $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, cioè $\alpha(O,P) = \alpha(O,Q)$. Conseguentemente, $P = Q$. $\square$

Definizione 36. Sia $(\mathcal{A}, V, \alpha)$ uno spazio euclideo. Un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathfrak{E})$ è detto *riferimento euclideo* se $\mathfrak{E}$ è una base ortonormale di V.

Teorema 37. *Sia* Γ *un fissato riferimento euclideo. Allora, per ogni punto* P *e per ogni indice* $1 \leq i \leq n$ *si ha*

$$p_i = p^i.$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di V. Allora, per ogni vettore $\mathbf{t} = \alpha(O, P)$ si ha

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{t}, \mathbf{e}_i \rangle \, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{e}_i.$$

Segue $p_i = p^i$. □

Definizione 38. Si dice *coseno dell'angolo* ϑ fra due vettori reali $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$ il numero

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{t}||_2 ||\mathbf{u}_2||}.$$

Osserviamo che, per la disuguaglianza di Schwartz,

$$|\cos\vartheta| \leq 1,$$

per ogni ϑ.

6 Distanza fra sottoinsiemi

Dati un punto P e un sottospazio affine $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ è possibile definire la distanza di P da $\mathcal{B}$ come

$$d(P, \mathcal{B}) := d(P, \Pi_{\mathcal{B}}(P)). \tag{8}$$

Tale quantità è ben definita grazie al Teorema 32, che garantisce l'esistenza e unicità della proiezione ortogonale di P su $\mathcal{B}$. Notiamo che $d(P, \mathcal{B}) = 0$ se, e solamente se, $P \in \mathcal{B}$. Per il Teorema 33 di approssimazione la (8) può riscriversi come

$$d(P, \mathcal{B}) = \min_{Q \in \mathcal{B}} d(P, Q). \tag{9}$$

A partire dalla (9), possiamo introdurre la più generale nozione di distanza fra due sottoinsiemi $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ come il numero reale positivo

$$d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \min_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ C \in \mathcal{C}}} d(B, C).$$

Si noti che tale minimo esiste sempre, anche se non è detto che vi sia un'unica coppia di punti $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ che lo realizza. In ogni caso abbiamo $d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ se, e solamente se, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

6.1 Distanza punto–iperpiano

Sia $\mathcal{B}$ un iperpiano di $\mathrm{EG}(n,\mathbb{R})$ Premettiamo una definizione.

Definizione 39. Sia ω un iperpiano di $\mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$ e supponiamo che W sia la sua giacitura. Si dice *direzione normale* a ω il sottospazio vettoriale 1–dimensionale $W^{\perp}$.

Fissiamo un riferimento ortonormale $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ e supponiamo che l'equazione di $\mathcal{B}$ rispetto a Γ sia

$$\mathcal{B} : f(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n - \alpha_0 = 0. \tag{10}$$

Chiaramente il vettore $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è non nullo; inoltre esso risulta perpendicolare a tutti i vettori della giacitura di $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) = \alpha(R, Q) = Q - R$ con $R, Q \in \mathcal{B}$, allora

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = \sum_i \alpha_i (q_i - r_i) = (f(Q) + \alpha_0) - (f(R) + \alpha_0) = 0.$$

Pertanto $\mathbf{n}$ identifica una direzione normale a $\mathcal{B}$.

Consideriamo ora un punto P avente coordinate $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ rispetto Γ. Vogliamo calcolare $d(P, \mathcal{B})$; a tal fine determiniamo il vettore $\mathbf{v} = \alpha(P, \Pi_{\mathcal{B}}(P))$. Innanzi tutto, osserviamo che $\mathbf{v}$ deve essere parallelo a $\mathbf{n}$. Consideriamo dunque la retta ℓ per P avente direzione $\mathbf{n}$ e calcoliamone l'intersezione Q con $\mathcal{B}$; tale punto sarà proprio la proiezione ortogonale di P sul sottospazio. L'equazione parametrica di ℓ è

$$\begin{cases} x_1 = & p_1 + t\alpha_1 \\ x_2 = & p_2 + t\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & p_n + t\alpha_n. \end{cases} \tag{11}$$

Mettendo a sistema con $f(X) = 0$ si ottiene che il punto $\Pi_{\mathcal{B}}(P)$ deve avere coordinate corrispondenti alla soluzione in t di

$$\alpha_1(p_1 + \alpha_1 t) + \alpha_2(p_2 + \alpha_2 t) + \cdots + \alpha_n(p_n + \alpha_n t) - \alpha_0 = 0. \tag{12}$$

In particolare dalla (12) si deduce

$$\sum_{i=1^n} (\alpha_i p_i + \alpha_i^2 t) - \alpha_0 = f(p) + t\|\mathbf{n}\|_2^2 = 0, \tag{13}$$

da cui

$$t = -\frac{f(P)}{||\mathbf{n}||_2^2}. \tag{14}$$

Sostituendo la (14) nella (11) si ottengono come coordinate per $\mathbf{v} = \alpha(P, \Pi_{\mathcal{B}}(P))$ rispetto a Γ

$$v_i = -\frac{f(P)}{||\mathbf{n}||_2^2}\alpha_i.$$

Tenuto conto dell'ortonormalità di $\mathfrak{B}$, la norma di $\mathbf{v}$ è data da

$$||\mathbf{v}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\frac{f(P)^2}{||\mathbf{n}||_2^4}\sum_i \alpha_i^2} = \sqrt{\frac{f(P)^2}{||\mathbf{n}||_2^2}}.$$

Pertanto, si ottiene come misura della distanza

$$d(P, \mathcal{B}) = \frac{|f(P)|}{||\mathbf{n}||_2}. \tag{15}$$

6.2 Distanza fra 2 rette e retta di minima distanza

Siano ora ℓ e m due rette di EG$(3, \mathbb{R})$. Supponiamo che le rispettive equazioni parametriche siano date da

$$\ell : \begin{cases} x = p_1 - v_1 t \\ y = p_2 - v_2 t \\ z = p_3 - v_3 t \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x = q_1 + w_1 u \\ y = q_2 + w_2 u \\ z = q_3 + w_3 u. \end{cases}$$

Osserviamo che in componenti il vettore che congiunge un punto U di ℓ con un punto V di m è

$$V - U = Q - P + \mathbf{w}u + \mathbf{v}t.$$

Dobbiamo minimizzare $\psi(u, t) = ||V - U||_2^2$. Un calcolo diretto mostra

$$\psi(u, t) = ||Q - P||_2^2 + 2u\,\langle Q - P, \mathbf{w}\rangle + 2t\,\langle Q - P, \mathbf{v}\rangle + u^2||\mathbf{w}||_2^2 + t^2||\mathbf{v}||_2^2 + 2tu\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle .$$

Calcolando il gradiente e sostituendo la definizione di $V - U$ si ottiene

$$\nabla\psi = 2\left(\langle V - U, \mathbf{w}\rangle, \langle V - U, \mathbf{v}\rangle\right). \tag{16}$$

Pertanto, la distanza minima si realizza quando $V - U$ è ortogonale contemporaneamente a ℓ e ad m. Distinguiamo ora due casi:

1. le rette ℓ e m sono parallele; allora, il sistema dato dalla (16) ha rango 1 e si trovano ∞^1 possibili soluzioni; geometricamente, si ha che per ogni punto $P \in \ell$ passa un piano π ortogonale sia ad ℓ che ad m; l'intersezione di π con m è la proiezione di P su m e realizza la distanza minima;

2. le rette ℓ e m hanno direzione diversa; allora il sistema descritto dalla (16) ha rango 2 e si trova un'unica soluzione in t ed u; geometricamente questo corrisponde ad osservare che vi è un'unica retta, diciamo n ortogonale sia ad ℓ che ad m e che le interseca entrambe; tale retta è detta *retta di minima distanza*.

7 Prodotto vettoriale

Sia ora V uno spazio euclideo 3–dimensionale dotato di prodotto scalare e $\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una sua base ortonormale orientata.

Definizione 40. Data una coppia di vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ diciamo *prodotto vettoriale* di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il vettore ottenuto calcolando il seguente determinante formale

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema 41. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$*;*

2. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ *se, e solamente se,* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente indipendenti;*

3. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *è ortogonale sia a* $\mathbf{w}$ *che a* $\mathbf{w}$*;*

4. $||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||_2 = ||\mathbf{v}||_2 ||\mathbf{w}||_2 |\sin\vartheta|$*, ove* ϑ *è l'angolo fra* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *mentre* $|\sin\vartheta| = \sqrt{1-\cos^2\vartheta}$.

Dimostrazione. Le prime due proprietà sono una diretta conseguenza delle proprietà dei determinanti.

Per quanto riguarda la terza, osserviamo che per ogni $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \in V$,

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = c_1 \left\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right\rangle - c_2 \left\langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \right\rangle + c_3 \left\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$c_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Come caso particolare $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ oppure $\mathbf{c} = \mathbf{w}$ si ha la terza proprietà. Per quanto concerne la quarta proprietà, osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|_2^2\|\mathbf{w}\|_2^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^2 = \; & (\sum_i v_i^2)(\sum_i w_i)^2 - (\sum_i v_i w_i)^2 = \\
& \sum_i v_i^2 \sum_j w_j^2 - (\sum_i v_i w_i)(\sum_j v_j w_j) = \\
& \sum_{i,j} v_i^2 w_j^2 - \sum_{i,j} v_i v_j w_i w_j = \\
& \sum_{i<j} v_i^2 w_j^2 + \sum_i v_i^2 w_i^2 + \sum_{i>j} v_i^2 w_j^2 \\
& \quad - \left(\sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j + \sum_i v_i^2 w_i^2 + \sum_{i>j} v_i w_i v_j w_j \right) = \\
& \sum_{i<j} v_i^2 w_j^2 + \sum_{i<j} v_j^2 w_i^2 - 2 \sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j = \\
& \sum_{i<j} (v_i^2 w_j^2 - 2 v_i w_i v_j w_j + v_j^2 w_i^2) = \\
& \sum_{i<j} (v_i w_j - v_j w_i)^2 = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Da questo segue la tesi. □

In generale, il prodotto vettoriale non è invariante rispetto trasformazioni ortogonali. In effetti, vale il seguente teorema.

Teorema 42. *Sia* A *una qualsiasi trasformazione lineare di* V*; allora,*

$$(A\mathbf{v}) \times (A\mathbf{w}) = (\det A)(A^T)^{-1}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in V$ un generico vettore. Innanzi tutto, osserviamo che

$$\langle A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}, A\mathbf{u}\rangle = \left\langle A^T(A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}), \mathbf{u}\right\rangle . \tag{17}$$

D'altro canto, per ogni $\mathbf{u} \in V$, si ha anche

$$
\begin{aligned}
&\langle A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}, A\mathbf{u}\rangle = \\
&\det \begin{pmatrix} A\mathbf{u} \\ A\mathbf{v} \\ A\mathbf{w} \end{pmatrix} = \det \left(A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \right) = \det A \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \langle (\det A)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \mathbf{u}\rangle .
\end{aligned} \tag{18}
$$

Siccome $\mathbf{u}$ è un vettore generico, deduciamo dalla (17) e dalla (18),

$$A^T(A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det A(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \tag{19}$$

da cui, poiché A è invertibile, segue la tesi. □

8 Isometrie

Definizione 43. Sia $\mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$ uno spazio euclideo. Si dice *isometria* ogni trasformazione affine $\xi : \mathrm{EG}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$ tale che per ogni $P, Q \in \mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$ si abbia

$$d(P,Q) = d(\xi(P), \xi(Q)).$$

È immediato vedere che ogni isometria ξ deve essere una trasformazione invertibile; infatti, se ξ non fosse iniettiva, avremmo due punti P, Q con $P \neq Q$ e $\xi(P) = \xi(Q)$. Questo comporterebbe

$$0 = d(\xi(P), \xi(Q)) = d(P,Q) \neq 0,$$

una contraddizione. In effetti possiamo dimostrare qualche cosa di più.

Teorema 44. *Fissato un riferimento euclideo* Γ*, ogni isometria* ξ *di* $\mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$ *si scrive come*

$$\xi(X) = QX + B$$

ove Q *è una matrice unitaria.*

Dimostrazione. Per il Teorema (25), ogni affinità (e quindi anche ogni isometria) si rappresenta in coordinate nella forma

$$\xi(X) = AX + B,$$

ove A è una matrice $n \times n$. Osserviamo che per definizione di distanza euclidea

$$\langle X - Y, X - Y \rangle = \|X - Y\|_2^2 = \\ \|\xi(X) - \xi(Y)\|_2^2 = \langle AX - AY, AX - AY \rangle = \langle A^\star A(X - Y), X - Y \rangle .$$

Pertanto,

$$\langle A^\star A(X-Y), X-Y \rangle - \langle X-Y, X-Y \rangle = \langle (A^\star A - I)(X-Y), X-Y \rangle = 0$$

per ogni vettore $X - Y \in V$ (ove V è la giacitura di $\mathrm{EG}(n,\mathbb{K})$). Se ne deduce $A^\star A - I = 0$, ovvero che A è una matrice unitaria. □

Teorema 45. *Siano* **t**, **u** *due vettori reali e* γ *una isometria. Allora il coseno dell'angolo* θ *individuato da* **t** *e* **u** *coincide col cosendo dell'angolo individuato da* $\hat{\gamma}(\mathbf{t})$ *e* $\hat{\gamma}(\mathbf{u})$*. In particolare* **t** *e* **u** *sono ortogonali se, e solamente se,* $\gamma(\mathbf{t})$ *e* $\gamma(\mathbf{u})$ *lo sono.*

Dimostrazione. Osserviamo che esiste una matrice unitaria A che descrive l'azione di $\hat{\gamma}$ sullo spazio vettoriale V; pertanto

$$\langle \hat{\gamma}(\mathbf{b}), \hat{\gamma}(\mathbf{u}) \rangle = \langle A\mathbf{b}, A\mathbf{u} \rangle = \langle A^{\star}A\mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \,.$$

La tesi segue ora dalla definizione di isometria. $\square$

Definizione 46. Tutte le isometrie della forma $\xi(X) = AX+B$ in cui $\det A = 1$ sono dette *dirette*; quelle per cui $\det A = -1$ sono chiamate *inverse*.

8.1 Isometrie del piano

Si vogliono caratterizzare tutte le isometrie di $\mathrm{EG}(2, \mathbb{R})$. Utilizziamo il Teorema 44 e osserviamo che una matrice reale è unitaria se, e solamente se, essa è ortogonale. In particolare l'insieme di tutte le matrici ortogonali 2×2 è dato da quelle matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tali che

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \qquad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \tag{20}$$

e

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \tag{21}$$

Dalla (20), vediamo che possiamo sempre trovare $\vartheta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ tali che

$$a_{11} = \cos\vartheta, \quad a_{12} = \sin\varphi, \quad a_{21} = \sin\vartheta, \quad q_{22} = \cos\varphi$$

Pertanto, dalla (21) abbiamo

$$\cos\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\varphi = 0,$$

ovvero

$$\sin(\vartheta + \varphi) = 0.$$

Da quest'ultima relazione si deduce $\varphi = -\vartheta$ oppure $\varphi = \pi - \vartheta$. Tenuto conto che

$$\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta, \qquad \sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta$$

e

$$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta, \qquad \cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$$

Si ottiene che la matrice A ha la forma

$$R_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

oppure

$$M_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$M_\vartheta = R_\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

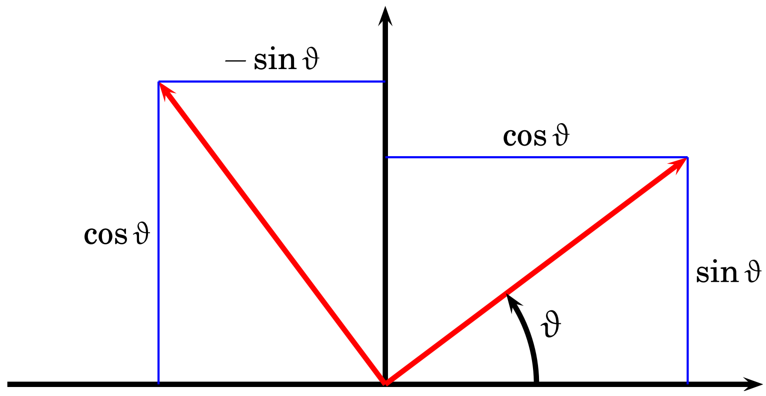

Figura 2: Azione della matrice R_ϑ

Forniamo ora una prima descrizione di alcune isometrie del piano:

1. una isometria del tipo $\tau_B(X) = X + B$ è detta *traslazione* di vettore B; tale trasformazione lascia inalterata la giacitura di qualsiasi sottospazio affine di $\mathrm{EG}(2, \mathbb{R})$ e, per $B \neq \mathbf{0}$, è priva di punti fissi;

2. una isometria del tipo $\rho_\theta(X) = A_1(\theta)X$ è detta *rotazione attorno l'origine del riferimento*. Essa per $\theta \neq 0$ fissa solamente il punto O di coordinate $(0, 0, \dots, 0)$. Osserviamo che, in generale,

$$A_1(\vartheta)A_1(\mu) = A_1(\vartheta + \mu).$$

   In particolare, tutte le rotazioni attorno l'origine del riferimento (equivalentemente, tutte le matrici ortogonali 2×2 a coefficienti reali con determinante $+1$) sono un gruppo, il gruppo *speciale ortogonale* $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

3. l'isometria $\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ è detta *riflessione* di asse $x_2 = 0$. Essa fissa tutti e soli i punti di coordinate $(x_1, 0)$.

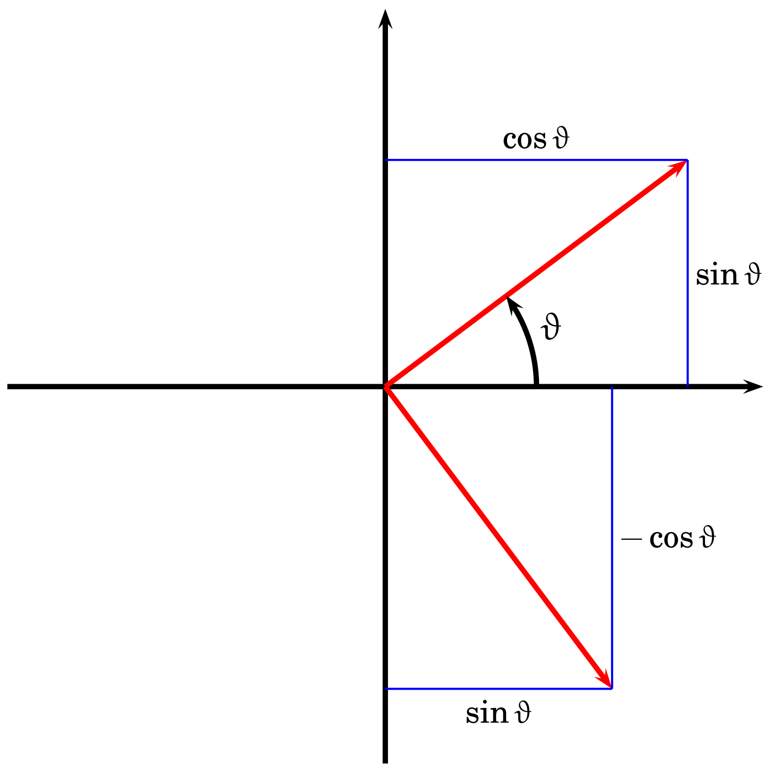

Figura 3: Azione della matrice M_ϑ

Traslazioni e rotazioni sono *isometrie di tipo diretto*. Possiamo dimostrare ora che la generica isometria del piano si può sempre scrivere come composizione di un numero finito di traslazioni, rotazioni attorno l'origine e riflessioni rispetto l'asse $x_2 = 0$. Infatti, consideriamo la generica isometria

$$\xi(X) = QX + B$$

Distinguiamo due casi:

1. se $\det Q = 1$, allora esiste un ϑ tale che $Q = A_1(\vartheta)$; pertanto possiamo scrivere
$$\xi(X) = (\tau_B \sigma_\vartheta)(X).$$

2. se $\det Q = -1$, allora esiste un ϑ tale che $Q = A_1(\vartheta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; pertanto,
$$\xi(X) = (\tau_b \cdot \sigma_\vartheta \cdot \mu)(X).$$

Definizione 47. Due isometrie β e γ sono dette *coniugate* se esiste un'isometria δ tale che

$$\beta = \delta^{-1}\gamma\delta.$$

Usando la precedente definizione possiamo introdurre le nozioni di rotazione e riflessione arbitrarie.

Definizione 48. Si dice

1. *rotazione* ogni isometria coniugata ad una isometria della forma
$$\rho_\theta = R_\theta X,$$
con $R_\theta \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;
2. *riflessione* ogni isometria coniugata a
$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X.$$

In particolare, una rotazione di un angolo θ attorno il punto P si scrive come

$$(\tau_P \rho_\theta \tau_{-P})(X) = A(X - P) + P = AX + (I - A)P.$$

Teorema 49. *Sia* μ *una riflessione. Allora, esiste una retta* r *tale che* $\forall P \in r$,

$$\mu(P) = P.$$

Tale retta è detta asse *di* μ.

Dimostrazione. Per definizione di riflessione, esiste una isometria γ tale che $\mu = \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Poiché γ è una affinità invertibile, l'immagine della retta di equazione $t : y = 0$ secondo γ è a sua volta una retta, diciamo r. Per ogni $P \in r$ abbiamo $Q = \gamma^{-1}(P) \in t$; d'altro canto σ agisce come l'identità su t, per cui

$$\gamma\sigma\gamma^{-1}(P) = \gamma\sigma(Q) = \gamma(Q) = P.$$

La tesi segue. □

Vale il seguente teorema.

Teorema 50. *Sia* μ *una riflessione di asse* r *e sia* $P \in \mathrm{EG}(2, \mathbb{R})$. *Indichiamo con* Q *la proiezione ortogonale di* P *su* r. *Allora,*

$$\alpha(P, Q) = \alpha(Q, \mu(P)).$$

In particolare, ogni riflessione è univocamente individuata dal suo asse.

Dimostrazione. Innanzi tutto, osserviamo che $Q \in r$ implica $\mu(Q) = Q$. Scriviamo ora $\mu = \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Siano $P' = \gamma^{-1}(P)$, $Q' = \gamma^{-1}(Q)$. Per il Teorema 45, ogni isometria preserva l'ortogonalità. Pertanto il vettore $\alpha(P', Q') = (p_1', p_2')$ è ortogonale al vettore $\mathbf{e_1} = (1, 0)$. Questo significa $p_1' = 0$ e

$$\hat{\sigma}(\alpha(P', Q')) = (0, -p_2') = -\alpha(P', Q') = \alpha(Q', P').$$

Dunque

$$\begin{aligned}&\alpha(\mu(P), Q) = \\ &\quad \hat{\mu}(\alpha(P, Q)) = \hat{\gamma}\hat{\sigma}\widehat{\gamma^{-1}}(\alpha(P, Q)) = \hat{\gamma}(\alpha(Q', P')) = \alpha(\gamma(Q'), \gamma(P')) = \alpha(Q, P).\end{aligned}$$

La tesi segue. □

8.2 Isometrie dello spazio 3–dimensionale

Consideriamo ora il caso 3–dimensionale. Adatteremo le definizioni precedentemente viste.

Definizione 51. Una isometria della forma

$$\varphi(X) = A(X - B) + B$$

con $A \in SO(3, \mathbb{R})$ è detta *rotazione* di centro il punto di coordinate B.

Teorema 52. *Ogni matrice* $A \in SO(3, \mathbb{R})$ *ammette* 1 *come autovalore. Inoltre, se* $A \neq I$*, la molteplicità di* 1 *come autovalore è* 1.

Dimostrazione. La matrice A è reale ortogonale e di ordine dispari; pertanto essa ammette sempre almeno un autovettore reale con autovalore ± 1. D'altro canto, A, vista come matrice complessa risulta diagonalizzabile; ne segue che essa o:

1. ha tre autovalori reali di modulo 1 e il cui prodotto è 1; pertanto almeno uno di essi deve essere $+1$; se tutti e tre gli autovalori sono positivi, allora A è la matrice identica; se due sono -1, allora la molteplicità geometrica di 1 è 1.

2. ha un autovalore reale e due autovalori complessi coniugati della forma $e^{i\vartheta}$ e $e^{-i\vartheta}$. Il prodotto di tali autovalori complessi è pari ad 1; pertanto il restante autovalore reale deve essere 1; chiaramente esso ha molteplicità 1.

La tesi segue. □

Conseguenza del teorema precedente è che esiste sempre uno uno spazio vettoriale V_1 fissato da A.

Definizione 53. Sia φ una rotazione non identica di centro B associata alla matrice $A \in SO(3, \mathbb{R})$. Si dice *asse di* φ la retta passante per B e parallela a V_1.

Teorema 54. *Sia* φ *una rotazione,* r *il suo asse e* $P \in r$*. Allora* $\varphi(P) = P$.

Dimostrazione. Poiché P appartiene all'asse di φ si ha

$$P = B + \mathbf{v},$$

con $\mathbf{v} \in V_1$. Ne segue,

$$\varphi(P) = A(P - B) + B = A(B + \mathbf{v} - B) + B = \mathbf{v} + B = P.$$

□

In generale si può dimostrare che ogni matrice di $A \in SO(3, \mathbb{R})$ si può sempre scrivere come prodotto $A = BCD$ di tre matrici della forma

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I tre angoli (ϕ, θ, ψ) sono detti *angoli di Eulero* della rotazione. In particolare si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\phi\cos\psi\cos\theta + \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi\cos\theta - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Euristicamente, la decomposizione $A = BCD$ si dimostra facendo vedere che

1. ogni rotazione è univocamente individuata dal suo asse e da un angolo ϕ;

2. una direzione può descriversi mediante due angoli ψ e θ.

Le traslazioni sono definite nel caso 3–dimensionale esattamente come nel caso piano. Per quanto concerne le riflessioni, mostriamo direttamente cosa accade in dimensione n.

Definizione 55. Sia $\mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$ uno spazio euclideo e supponiamo che π sia un iperpiano fissato. Si dice *riflessione di asse* π la trasformazione affine μ che associa ad ogni $P \in \mathrm{EG}(n, \mathbb{C})$ il punto P' determinato dalla seguente equazione

$$\alpha(P, \Pi_\pi(P)) = \alpha(\Pi_\pi(P), P')$$

ove con $\Pi_\pi(P)$ si è indicata la proiezione ortogonale di P su π.

Teorema 56. *Ogni riflessione è una isometria.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}\}$ una base ortonormale della giacitura W di π e consideriamo il riferimento affine $\Gamma = (O, \mathfrak{B})$ ottenuto completando $\mathfrak{W}$ a base della giacitura di tutto lo spazio euclideo $\mathrm{EG}(n, \mathbb{K})$ mediante un versore in $\mathbf{w}_n \in W^\perp$. Chiaramente, μ fissa tutti i punti di π. Sia ora $P = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)^T \in \mathrm{EG}(n, \mathbb{K})$ scritto in componenti rispetto il riferimento fissato. Allora,

$$\Pi_\pi(P) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, 0)^T.$$

Pertanto,

$$\alpha(P, \Pi_\pi(P)) = (0, 0, \dots, 0, p_n)^T$$

e dunque

$$P' = \Pi_\pi(P) - \alpha(P, \Pi_\pi(P)) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, -p_n)^T.$$

Mostriamo ora che per ogni $P, Q \in \mathrm{EG}(n, \mathbb{K})$ si ha $d(P, Q) = d(\mu(P), \mu(Q))$. Infatti, passando in coordinate

$$d(P, Q)^2 = \|\alpha(P, Q)\|_2^2 = \|Q - P\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |q_i - p_i|^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} |q_i - p_i|^2 + |p_i - q_i|^2 = \|\mu(Q) - \mu(P)\|_2^2 = d(\mu(P), \mu(Q))^2.$$

La tesi è pertanto verificata. □

9 Normali e assi

Teorema 57. *Siano* P, Q *due punti fissati con* $P \neq Q$. *Allora, l'insieme di tutti i punti* $X \in \mathrm{EG}(n, \mathbb{R})$ *tali che* $d(P, X) = d(Q, X)$ *è un iperpiano* ω. *Inoltre, il punto medio* M *di* P *e* Q *appartiene ad* ω *e il vettore* $\alpha(P, Q)$ *identifica la direzione normale ad* ω.

Dimostrazione. Fissiamo un riferimento euclideo. Poiché

$$\|\alpha(P,X)\|_2^2 = \|\alpha(Q,X)\|_2^2,$$

passando in coordinate, e tenuto conto della bilinearità del prodotto interno di $\mathbb{R}^n$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(q_i - x_i)^2,$$

da cui si deduce

$$\sum_{i=1}^{n}\left((p_i - x_i) + (q_i - x_i)\right)\left((p_i - x_i) - (q_i - x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((p_i + q_i - 2x_i)(p_i - q_i)\right) = 0.$$

In particolare, si vede che i punti di ω sono tutti e soli quelli che soddisfano l'equazione lineare

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(p_i - q_i) = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n}(p_i^2 - q_i^2);$$

ω è dunque un iperpiano. Se M è il punto medio fra P e Q, si ha

$$\alpha(P,M) = \alpha(M,Q),$$

da cui

$$d(P,M)^2 = \|\alpha(P,M)\|_2^2 = \|\alpha(M,Q)\|_2^2 = d(Q,M)^2,$$

cioè $M \in \omega$.

Sia ora W la giacitura di ω. Poniamo $\mathbf{v} = \alpha(P,Q) = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)^T$ e consideriamo due punti $X, Y \in \omega$. Sia $\mathbf{w} = \alpha(X,Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)^T \in W$. Abbiamo

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)(q_i - p_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i(q_i - p_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i(q_i - p_i) = \frac{1}{2}(p_i^2 - q_i^2) - \frac{1}{2}(p_i^2 - q_i^2) = 0.$$

Pertanto, $\alpha(P,Q) \neq \mathbf{0}$ è un generatore di $W^\perp$. $\square$

Definizione 58. Si dice *iperpiano assiale* individuato da due punti $P, Q \in$ EG$(n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutti i punti $R \in$ EG$(n, \mathbb{K})$ appartenenti all'iperpiano passante per il punto medio fra P e Q e avente direzione normale generata da $\alpha(P, Q)$.

Osserviamo che se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, per il Teorema 57, l'iperpiano assiale coincide con il luogo di tutti i punti equidistanti da P e da Q; quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ciò però non è più vero.

In generale, comunque assegnato un iperpiano ω di EG$(n, \mathbb{K})$ avente equazione

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \beta_0 \tag{22}$$

è sempre possibile trovare un vettore

$$\mathbf{b} = \overline{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}$$

tale che la giacitura di ω sia proprio lo spazio vettoriale

$$W = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0\}.$$

In effetti, possiamo scrivere anche le coordinate dei punti dell'iperpiano mediante prodotti interni, infatti l'equazione (22) si può sempre scrivere anche come

$$\Big\langle (x_1, x_2, \dots, x_n, 1), (\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_n}, -\overline{\beta_0}) \Big\rangle = 0.$$

10 Coniche

In questo paragrafo introdurremo la nozione di coniche come luoghi di punti in un piano euclideo EG$(2, \mathbb{R})$.

Definizione 59. Siano

1. F un punto di EG$(2, \mathbb{R})$, detto *fuoco*
2. ℓ una retta di EG$(2, \mathbb{R})$ con $F \notin \ell$, detta *direttrice*;
3. $e \geq 0$ un numero reale, detto *eccentricità*.

Una *conica* è l'insieme dei punti $P \in$ EG$(2, \mathbb{R})$ tali che

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e. \tag{23}$$

Definizione 60. Una conica è detta:

1. *ellisse* se $0 \leq e < 1$;
2. *parabola* se $e = 1$;
3. *iperbole* se $e > 1$.

Fissiamo ora un riferimento euclideo opportuno; possiamo supporre senza perdere in generalità che

1. la direttrice ℓ sia la retta $x = 0$;
2. il fuoco F abbia coordinate $(k, 0)$;
3. il punto P abbia coordinate generiche (x, y).

Allora, la condizione diviene

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = \frac{\sqrt{(x-k)^2 + y^2}}{|x|}.$$

Elevando al quadrato si vede che tale condizione è equivalente a

$$(1 - e^2)x^2 - 2kx + y^2 + k^2 = 0. \tag{24}$$