Programma del corso di Geometria e Algebra

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (corso A)

Luca Giuzzi

Anno accademico 2007–08
Politecnico di Bari

1 Obiettivi del corso

Fra gli obiettivi del corso vi sono

- Conoscere e saper identificare le strutture algebriche di gruppo, campo e spazio vettoriale.
- Conoscere le proprietà fondamentali degli spazi vettoriali, delle applicazioni lineari e raper rappresentare una applicazione lineare mediante matrici.
- Saper discutere e risolvere sistemi di n equazioni lineari in m incognite su di un campo arbitrario.
- Saper trattare in forma algebrica alcuni problemi di natura geometrica e, al contrario, essere in grado di fornire una interpretazione geometrica per problemi algebrici.
- Conoscere le nozioni di spazio affine e spazio euclideo in dimensione arbitraria (con particolare attenzione ai casi di dimensione 2 e 3).

2 Testi consigliati

I seguenti sono i testi consigliati per il corso:

1. A. Cavicchioli, F. Spaggiari, *Primo modulo di Geometria*, Pitagora Editrice (Bologna);
2. E. Sernesi, *Geometria 1*, Seconda edizione, Bollati Boringhieri (2000);
3. S. Lipschutz, M. Lipson, *Algebra lineare*, collana Shaum's, (114), Terza Edizione, McGraw-Hill;
4. V. Abatangelo, B. Larato, A. Terrusi, *Complementi ed esercizi di Algebra*, Laterza.

3 Programma dettagliato

▷ Richiami su insiemi, relazioni e funzioni

1. La nozione di insieme; unione, intersezione, differenza e prodotto cartesiano di insiemi.
2. La nozione di relazione; proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva; relazioni d'ordine e di equivalenza; classi di equivalenza e insieme quoziente.

▷ Operazioni su di un insieme

1. Operazioni binarie su di un insieme; elemento neutro e inverso per una operazione binaria; la proprietà associativa e quella commutativa.
2. Monoidi e gruppi; esempi di gruppi commutativi e non commutativi; unicità dell'elemento neutro di un gruppo; sottogruppi.
3. Campi, sottocampi e relativi esempi.

▷ Spazi vettoriali

1. Definizione; esempi di spazi vettoriali; sottospazi vettoriali.
2. Chiusura lineare di un insieme; span di un insieme finito.
3. Operazioni fra sottospazi vettoriali: somma e intersezione.
4. Insiemi di generatori per uno spazio vettoriale; lineare dipendenza e indipendenza.
5. Base di uno spazio vettoriale; teorema della base; teorema di completamento della base; dimensione di uno spazio vettoriale e teorema della dimensione; formula di Grassman.
6. Basi ordinate; rappresentazione di un vettore rispetto una base ordinata fissata.
7. Spazio vettoriale delle matrici $m \times n$.

▷ Applicazioni lineari e matrici

1. Definizione; operazioni fra matrici: matrice trasposta; somma e prodotto di matrici; proprietà del prodotto di matrici.
2. Determinante di una matrice quadrata; primo e secondo teorema di Laplace; proprietà dei determinanti; teorema di Binet.
3. Matrice aggiunta e matrice inversa.
4. Rango di una matrice; equivalenza del rango per righe e per colonne; teorema di Kronecker; teorema degli orlati.
5. Applicazioni lineari; immagine e nucleo.
6. Preimmagine di un vettore secondo una applicazione lineare.
7. Rappresentazione di una applicazione lineare mediante matrici; formula del cambiamento di base.
8. Determinazione dell'immagine di una applicazione lineare.
9. Legame fra prodotto matriciale e composizione di applicazioni lineari.

▷ Equazioni e sistemi lineari

1. Equazioni lineari.
2. Sistemi di m equazioni lineari in n incognite; sistemi equivalenti.
3. Legame fra sistemi lineari e applicazioni lineari.
4. Teorema di Rouché–Capelli.
5. Sistemi di Cramer e loro risoluzione; risoluzione di sistemi non equivalenti ad un sistema di Cramer.
6. Discussione di sistemi lineari con parametro.

▷ Autovalori e autovettori

1. Autovalori e autovettori di un endomorfismo.
2. Polinomio caratteristico ed equazione caratteristica di una matrice; molteplicità algebrica di un autovalore.
3. Autospazi; molteplicità geometrica di un autovalore; legame fra molteplicità algebrica e geometrica; proprietà degli autospazi.
4. Relazione di similitudine fra matrici; diagonalizzabilità.
5. Teorema di Hamilton–Cayley.
6. Radice n–esima di una matrice complessa invertibile.

▷ Spazi affini

1. Definizione; supporto e giacitura.
2. Sottospazi affini; sottospazio individuato da un insieme di punti.
3. Dipendenza e indipendenza di un insieme di punti; dimensione affine.
4. Punto medio di un segmento.
5. Riferimenti affini e coordinate; equazioni parametriche e analitiche di un sottospazio affine.
6. Legame fra sistemi lineari e sottospazi affini; sistema omogeneo associato ad un sistema dato e giacitura.
7. Parallelismo.
8. Rappresentazione e posizione reciproca di due rette nel piano e nello spazio; parametri direttori e coseni direttori; fasci propri e impropri di rette nel piano.
9. Rappresentazione e posizione reciproca di due piani nello spazio; fasci propri e impropri di piani nello spazio.
10. Condizione di collinearità di 3 punti nel piano e condizione di complanarità di 4 punti nello spazio.
11. Cambiamenti di riferimento affine e affinità; equivalenza affine.

▷ Spazi euclidei

1. Forme bilineari; forme bilineari alternanti e simmetriche.
2. Prodotto scalare; disuguaglianza di Schwartz.
3. Proiezione ortogonale di un vettore su di un altro; insiemi ortogonali e procedimento di Gram–Schmidt.
4. La nozione di distanza; disuguaglianza triangolare e distanza euclidea.
5. Angolo fra vettori e teorema di Carnot; angolo fra due rette e fra due piani; direzione normale rispetto un iperpiano.
6. Riferimenti affini cartesiani; formula della distanza fra due punti in un riferimento arbitrario e in un riferimento cartesiano; distanza punto/retta nel piano e nello spazio; distanza punto/piano nello spazio; distanza fra due rette sghembe e retta di minima distanza.
7. Iperpiano assiale di un segmento.
8. Prodotto vettoriale.
9. Circonferenza nel piano e nello spazio; sfere e ipersfere.
10. Isometrie di uno spazio euclideo; cambiamenti di riferimento cartesiano e matrici ortogonali.
11. Il gruppo ortogonale $O(n)$; inversa di una ortogonalità.
12. Isometrie nel piano: rotazioni, traslazioni e riflessioni nel piano euclideo; il gruppo ortogonale $O(2)$ e il gruppo speciale ortogonale $SO(2)$.