Il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori riga $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ di A dicesi **spazio delle righe** di A ed il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dai vettori colonna $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ di A dicesi **spazio delle colonne** di A. Tali spazi verranno indicati con $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ rispettivamente. Si ha il seguente:

TEOREMA. *Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una matrice $A(m,n)$ hanno la stessa dimensione.*

Dim. Se tutti gli elementi di A sono zero, le righe e le colonne di A sono vettori nulli, quindi $\dim \mathcal{R}_A = \dim \mathcal{C}_A = 0$.

Se A non è la matrice nulla, vi è qualche vettore riga e qualche vettore colonna che non sono vettori nulli.

Quindi, per il teorema 4.3 del capitolo 2, tra gli m vettori riga ci saranno al più $r \leq m$ vettori riga che sono un base di $\mathcal{R}_A$ ed al più $s \leq n$ vettori colonna che sono una base di $\mathcal{C}_A$.

Supponiamo, senza ledere la generalità, che $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ sia una base di $\mathcal{R}_A$.

Allora, per un qualunque vettore riga $\mathbf{a}_i$ di A si ha:

$$\mathbf{a}_i = h_{i1}\mathbf{a}_1 + h_{i2}\mathbf{a}_2 + \ldots + h_{ir}\mathbf{a}_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{4.2}$$

Ricavando dalle precedenti il j-esimo elemento di $\mathbf{a}_i$ si ha:

$$a_{ij} = h_{i1}a_{1j} + h_{i2}a_{2j} + \ldots + h_{ir}a_{rj} \tag{4.3}$$

o, più esplicitamente:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= h_{11}a_{1j} + h_{12}a_{2j} + \ldots + h_{1r}a_{rj} \\ a_{2j} &= h_{21}a_{1j} + h_{22}a_{2j} + \ldots + h_{2r}a_{rj} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mj} &= h_{m1}a_{1j} + h_{m2}a_{2j} + \ldots + h_{mr}a_{rj} \end{aligned} \tag{4.4}$$

per $j = 1, 2, \ldots, n$.

Le relazioni (4.4) mostrano che il j-esimo vettore colonna $\mathbf{a}^j$ di A, è combinazione lineare degli r vettori di $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{h}^1 = (h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{m1})\,, \mathbf{h}^2 = (h_{12}, h_{22}, \ldots, h_{m2})\,, \ldots, \mathbf{h}^r = (h_{1r}, h_{2r}, \ldots, h_{mr})$$

e quindi, per $j = 1, 2, \ldots, n$, si ha:

$$\mathbf{a}^j \in L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \ldots, \mathbf{h}^r)\,.$$

Dalla proposizione 3.5 del capitolo 2, segue che $\mathcal{C}_A \subseteq L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \ldots, \mathbf{h}^r)$, pertanto:

$$\dim \mathcal{C}_A \leq \dim L(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \ldots, \mathbf{h}^r)$$

cioè:

$$s \leq r\,.$$

Scambiando il ruolo delle righe e delle colonne e procedendo analogamente, si prova che:

$$r \leq s$$

e quindi:

$$r = s\,.$$

Poiché r ed s sono il numero dei vettori di una base di $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{C}_A$ rispettivamente, allora $\dim \mathcal{R}_A = \dim \mathcal{C}_A$, da cui la tesi. ■