Definizione 2.7. Data una matrice $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si chiama:

(a) *sottomatrice* di $\mathbf{A}$ una qualsiasi matrice di tipo $r \times s$, con $1 \le r \le m$ e $1 \le s \le n$, ottenuta intersecando r righe e s colonne di $\mathbf{A}$;
(b) *minore* di $\mathbf{A}$ una sottomatrice quadrata di $\mathbf{A}$.

Esempio 2.8

Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sono sottomatrici di $\mathbf{A}$; in particolare, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

sono minori di $\mathbf{A}$.

È chiaro che, se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine n, ogni elemento di $\mathbf{A}$ individua un minore di $\mathbf{A}$ di ordine $n-1$, ottenuto sopprimendo la riga e la colonna che contengono l'elemento considerato. Tale osservazione svolgerà un ruolo chiave nella definizione del determinante di una matrice quadrata, come vedremo subito. A tale scopo, introduciamo una nozione "su misura":

Definizione 2.9. Data una matrice $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ e fissato un elemento a_{ij} di $\mathbf{A}$ (con $1 \le i, j \le n$), si chiama *minore complementare* di a_{ij} in $\mathbf{A}$, e si indica con $\mathbf{A}_{ij}$, il minore di ordine $n-1$ di $\mathbf{A}$ ottenuto sopprimendo la riga e la colonna di $\mathbf{A}$ contenenti a_{ij}.

Esempio 2.10

Data la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -7 & 6 \\ 9 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, il minore complementare dell'elemento -5 è la matrice:

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Siamo finalmente in grado di definire il determinante di una matrice quadrata. Occorre avvertire in proposito che, a differenza di quanto abbiamo visto in precedenza per le matrici 2×2 (cfr. la (19)), non esiste alcuna formula semplice per il determinante di una matrice $n \times n$. Inoltre, le formule che definiscono il determinante, seguendo approcci diversi, sono tutte abbastanza complicate e per di più il loro confronto diretto è tutt'altro che facile. Daremo qui una definizione *ricorsiva* del determinante, cioè definiremo il determinante di una matrice quadrata di ordine n, utilizzando la definizione del determinante di una matrice quadrata di ordine $n-1$, e così via a ritroso, fino ad arrivare al determinante di una matrice 2×2, o meglio 1×1.

Seguiremo, in sostanza, lo stesso procedimento che si usa per definire il *fattoriale* $n!$ di un numero naturale n[8]:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (n-1)!n & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{29}$$

DEFINIZIONE 2.11. Data una matrice arbitraria $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$, il *determinante* di A è un numero reale, che si denota con $\det \mathbf{A}$ o con $|\mathbf{A}|$[9], e si definisce, *procedendo lungo la prima riga*, come segue:

(a) se $n = 1$, sicché $\mathbf{A} = (a)$, si pone semplicemente:

$$\det \mathbf{A} = a \tag{30}$$

(b) se $n = 2$, sicché $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si pone:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a \cdot \det(d) - b \cdot \det(c) \\ &= ad - bc \end{aligned} \tag{31}$$

(c) se $n = 3$, sicché $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, si pone:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \end{aligned} \tag{32}$$

(d) se $n > 3$, dunque $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, si pone:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \cdot \det \mathbf{A}_{12} + a_{13} \cdot \det \mathbf{A}_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot \det \mathbf{A}_{1n} \tag{33}$$

essendo $\mathbf{A}_{1j}$ (con $j = 1, \ldots, n$) il minore complementare dell'elemento a_{1j} in $\mathbf{A}$, vale a dire, il determinante di $\mathbf{A}$ è uguale alla somma dei prodotti, presi con segno alterno, degli elementi della prima riga di $\mathbf{A}$ per i determinanti dei rispettivi minori complementari. In particolare, l'espressione che compare nel secondo membro della (33) prende il nome di *sviluppo del determinante di* $\mathbf{A}$ *lungo la prima riga*.

---

[8] Il punto esclamativo sta a indicare la sorpresa per la crescita "vertiginosa" del fattoriale: per avere un'idea, basta calcolare ad esempio 10!.

[9] O ancora, con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{se } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE 2.14. Data una matrice quadrata $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} in $\mathbf{A}$, e si indica con α_{ij}, il numero reale:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}_{ij} \tag{34}$$

essendo $\mathbf{A}_{ij}$ il minore complementare di a_{ij} in $\mathbf{A}$.

Possiamo allora riscrivere la definizione (33) nella forma:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \ldots + a_{1n}\alpha_{1n} \tag{35}$$

Siamo finalmente in grado di enunciare il seguente risultato fondamentale, che va sotto il nome di *primo teorema di Laplace* (e di cui ometteremo la dimostrazione).

TEOREMA 2.15. *Il determinante di una matrice quadrata $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ risulta uguale alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una riga o di una colonna* arbitraria *di $\mathbf{A}$ per i rispettivi complementi algebrici, ossia:*

$$\det \mathbf{A} = \begin{cases} a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in} & (\textit{sviluppo lungo la i-esima riga}) \\ a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj} & (\textit{sviluppo lungo la j-esima colonna}) \end{cases} \tag{36}$$

Vediamo subito una prima conseguenza del teorema 2.15 per alcune classi notevoli di matrici (cfr. cap. 3, def. 3.13):

COROLLARIO 2.16. *Sia data una matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ soddisfacente a una delle seguenti condizioni:*

(1) $\mathbf{A}$ *è triangolare superiore;*
(2) $\mathbf{A}$ *è triangolare inferiore;*
(3) $\mathbf{A}$ *è diagonale.*

Allora il determinante di $\mathbf{A}$ risulta uguale al prodotto degli elementi diagonali:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \tag{37}$$

Dimostrazione. Poiché una matrice diagonale è triangolare superiore e triangolare inferiore, possiamo limitarci a esaminare i casi (1) e (2). A questo punto, dopo aver osservato che, nel caso (1) conviene sviluppare il determinante lungo la prima colonna e nel caso (2) invece, lungo la prima riga, basta procedere per induzione su $n \geq 1$. ■

OSSERVAZIONE 2.17. Per finire, segnaliamo una regola utile nella pratica, per calcolare il determinante di una matrice 3×3, diciamo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Ebbene, il determinante di A si può ottenere a partire dalla tabella riportata qui a fianco, formata da A con l'aggiunta a destra delle prime due colonne di A, calcolando la somma dei prodotti effettuati lungo le linee "intere":

$$\left(\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right)\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$aei + bfg + cdh$$

e sottraendo da essa la somma dei prodotti lungo le linee "tratteggiate":

$$ceg + afh + bdi$$